*Уравнения математической физики*
*Осенний семестр(2008-2009)*
*Под редакцией Е. В. Радкевич*

## Содержание

# ВВЕДЕНИЕ.

Лекции из расчета трех академических часов в неделю и одного академического часа в неделю–практака к лекциям, плюс два академического часа в неделю упражнения(всего 6 академических часов в неделю). В зависимости от уровня курса для части теорем оставить только формулировки, доказательства оставив для любознательных студентов или как задачи для продвинутых.

## Лекция 1. Предмет исседования теории уравнений математической физики.

Тему лекций годового курса, состоящего из двух частей: обыкновенные дифференциальные уравнения(ОДУ) и уравнения в частных производных физики(уравнения с распределенными параметрами) можно сформулировать так:
**Моделирование, уравнения, язык математики и естественных наук(физики, химиии, биологии)**.
Наша задача понять связь этих слов:

1. как моделирование процессов облачается в одежду уравнений(связей основных параметров процесса в их динамике) позволяющих реконструировать процес,

2. как из этих задача возникает необходимость математического языка-языка описания и формализации реальных процессов на языке формул

3. задача согласования математического языка с языком зкспериментальной и технической физики или химии(как обратной задачи адаптации математических результатов(сегодня повсеместно результатов численного счета на ЭВМ) с результатами эксперимента.

Начнем с простого примера: одномерных частиц, движущихся без столкновений (сильно разряженный газ) по прямой $R^1$ в отсутствии внешних сил. В силу уравнения Ньютона в отсутствии внешних сил ускорение

$$\overset{\circ\circ}{x}(t;x_0)=0,$$

вдоль траектории отдельной частицы $x(t;x_0)$, стартоващий в нвчальный момент времени $t=0$ из точки $x=x_0$. Если гладкая функция $v(x,t)$, $x\in R^1$, $t\geq 0$,– распределение скоростей частиц в момент времени $t$ т.е. траектория частицы подчиняется уравнению

$$\overset{\circ}{x}(t;x_0)=v(x(t;x_0),t),\ t>0,\quad x|_{t=0}=x_0\in R^1, \tag{1}$$

Тогда в силу уравнения Ньютона

$$\overset{\circ\circ}{x}(t;x_0)=\partial_t v(x(t;x_0),t)+\overset{\circ}{x}(t;x_0)\,\partial_x v(x(t;x_0),t)=0,\quad t>0.$$

Тогда в силу (1) получим уравнение с частными производными первого порядка для скорости (порядок производных не выше 1):

$$\partial_t v(x,t)+v(x,t)\,\partial_x v(x,t)=0,\quad (x,t)\in R^2_+=\{(x,t),x\in R^1,\ t>0\} \tag{2}$$

$$v(x,t)|_{t=0} = v(x_0,0) = v_0(x),$$

с заданным начальным распределение скорости $v_0(x)$. По аналогии с обыкновенными уравнениями (см. (1)) такая задача называется задачей Коши для уравнения (2) (уравнения Хопфа).

Теперь посмотрим, всегда ли эта задача имеет гладкое (классическое) решения $v \in C^1(\overline{R^2_+})$ в замыкании области $R^2_+$. Рассмотрим два начальных распределения $v_0 = \mathrm{arctg}(x)$ и $v_0 = -\mathrm{arctg}(x)$. Для построения решения применим так называемый метод характеристик, с которым вы уже встречались в курсе обыкновенных уравнений. В чем он состоит?

1. Из уравнения (2) следует, что скорость $v(x,t)$ постоянна вдоль траектории (характеристики) частицы:

$$v(x(t;x_0),t) = v_0(x_0) \;\Leftrightarrow\; x(t;x_0)|_{t=0} = x_0, \tag{3}$$

(характеристики уравнения (2)). Тогда из (1) следует что

$$x(t;x_0) = x_0 + v_0(x_0)\,t. \tag{4}$$

2. Теперь рассмотрим любую точку $(x,t) \in R^2_+$. Если через эту точку проходит какая то траектория, т.е. для некоторого $x_0$ имеем $x = x(t,x_0)$, то в этой точке $v(x,t) = v_0(x_0)$. Таким образом, во всех достижимых точках $(x,t)$ мы однозначно определяем значение скорости $v(x,t)$, если в эту точку приходит **только одна траекторя**, т.е. когда $x_0 = x_0(x,t)$ однозначно определяется по точке $(x,t)$. Множество таких точек будем называть областью определения гладкого решение $\mathcal{O}_s(v_0)$ с заданным начальным условием $v_0$. Очевидно, что в этой области уравнение

$$x - x_0 + v_0(x_0)\,t = 0 \tag{5}$$

определяет диффеоморфизм $x_0(x,t) : \mathcal{O}_s(v_0) \to R^1$. Очевидно это отображение диффеоморфизм, если выполнено условие

$$\frac{\partial\, x}{\partial\, x_0} = \partial_{x_0}\Big(x_0 + v_0(x_0)\,t\Big) = 1 + t\,\partial_{x_0} v_0(x_0) > 0, \tag{6}$$

(поскольку $\partial_{x_0}\Big(x_0 + v_0(x_0)\,t\Big)|_{t=0} = 1 > 0$), тогда по теореме о неявной функции однозначно опредекляется решение $x_0(x,t)$ уравнения (5). Отсюда следует, что гладкое решение

$$v(x,t) = v_0(x_0(x,t)), \quad (x,t) \in \mathcal{O}_s(v_0)$$

Для первого начального распределения $v_0 = \mathrm{arctg}(x)$ имеем $\partial_x v_0 = 1/(1+x^2) > 0$, $\forall x \in R^1$, следовательно характеристики не пересекаются во всей верхней полуплоскости $R^2_+$, тогда решение

$$v(x,t) = \mathrm{arctg}(x_0(x,t)) \quad \forall\,(x,t) \in \mathcal{O}^+_s = R^2_+.$$

Для второго начального распределения $v_0 = -\mathrm{arctg}(x)$ справедливо неравенство (6) если $t < 1 + x^2$, т.е. в этом случае $\mathcal{O}^-_s = \{(x,t); t < 1 + x^2\}$ и решение

$$v(x,t) = -\mathrm{arctg}(x_0(x,t)) \quad \forall\,(x,t) \in \mathcal{O}^-_s.$$

Таким образом, задача Коши имеет единственное классическое решение в полосе $R_1^2 = \{(x,t),\, x \in R^1,\, t \in (0,1)\}$. В полосе же $R_T^2 = \{(x,t),\, x \in R^1,\, t \in (0,T)\}$, $T > 2$, классического решения **не существует.** Теперь отметим, что слева и справа точки покое $x = 0$ скорость возрастает и убывает вверх и вниз по профилю скорости $y = v(x,t)$ соответственно. Тем самым точки убыстряютя в направление точки покоя справа и слева от нее. Со временем профиль скорости становится круче, стремясь к вертикали $x = 0$, т.е. решение стремится к профилю разрывной функции $y = -\mathbf{sign} x$.

Какие выводы можно сделать из этого простейшего примера? Базовая задача для моделей математической физики–задача Коши может не иметь классического решения! Но для физики важнейшим свойством модели, описывающей исследуемый процесс, является ее **корректность**:

1. существование решения;
2. единственность решения;
3. непрерывная зависимость от начальных даных (малое возмущение начальных данных приводит к малым возмущениям решения).

Это приводит к необходимости рассматривать **неклассические– слабые (менее гладкие решение**. Таким образом, исследуемая задача требет своих **классов разрешимости** $E_v$ **( банаховых пространств) ,**
соответствующих классов начальных данных $E_{v_0}$ так что:

1. для любого $v_0 \in E_{v_0}$ существует решение $v \in E_v$;
2. это решение единственное;
3. для решений $v, v_1$, $V|_{t=0} = v_0, v|_{t=0} = v_0^1$, справедлива априорная оценка

$$||v - v_1;\, E_v|| \,<\, C\,||v_0 - v_0^1;\, E_{v_0}|| \quad \forall v_0, v_0^1 \in E_{v_0},$$

с постоянной $C$ независящей от $v_0, v_0^1 \in\, E_{v_0}$ (откуда следует непрерывная зависимость от начальных данных).
В дальнейшем условия 1.-3. будем называть условиями корректности задачи Коши (2) для пары $(E_v, E_{v_0})$.
Теперь отметим, что приступая к исследованию модели математик должен учитывать тот факт, что, как говорят физики, все модели получаются при некоторых **усечениях** информации о процессе, когда часть факторов не принимается во внимание. Например, мы можем получить расширение задачи (2), если исследуем движение одномерных частиц без столкновений в потенциальном поле(под давлением) которое может ускорять частицы или затормаживать:

$$\begin{gathered}
\partial_t v(x,t) + v(x,t)\,\partial_x v(x,t) + \partial_x P(x,t) = 0, \quad (x,t) \in R_+^2 \qquad (7)\\
\partial_t P + \mu\,\partial_x v(x,t) + \frac{1}{\varepsilon}\,P = 0, \quad (x,t) \in R_+^2\\
v(x,t)|_{t=0} = v_0(x), \quad P|_{t=0} = P_0(x)
\end{gathered}$$

где $P(x,t)-$ давление. Если $\varepsilon > 0-$ время релаксации, являющееся мерой отклонения решений расширенной системы от решений уравнения (2), $\mu = \mathrm{const}$. Тогда давление уравнивается. Система (7) сглаживает разрывы уравнения Хопфа(о которых мы говорили выше).

Насамом деле, мы имеем не одну модель, а иерархию моделей(семейство "вложеных"моделей, семейство расширений предельной модел). Это
чрезвычайно важно понимать, чтобы не рассматривать отдельные модели как абсолют, как некоторое самоцельное, самодостаточное явление. К сожалению, вне физических реалий, математик подвержен искусу абсолютизации и возведения возникающих трудностей в исследовании модели или структурной ее вырожденности в ранг самоцельных содержательных источников исследований, а не всего лишь следствия ее усеченности. Например, если с этой точки зрения рассмотреть (7) как расширение (2), считая время релаксации малым $\varepsilon \ll 1$, в окрестности состояния равновесия $P=0,\ v_e = \mathrm{const}$, мы можем рассмотреть его возмущение

$$v = v_e + \varepsilon\, w, \quad P = \varepsilon\, \sigma,$$

Рассмотрим регулярную асимптотику отклонения $(w,\sigma)$ от состояния равновнсия. В первом приближении получим так называемое приближение Навье-Стокса

$$\begin{gathered}\partial_t w(x,t) + v_e\, \partial_x w(x,t) + \partial_x \sigma(x,t) = 0, \quad (x,t)\in R^2_+ \\ \varepsilon\, \partial_x w(x,t) + \sigma = 0, \quad (x,t)\in R^2_+ \\ w(x,t)|_{t=0} = w_0(x), \quad \sigma|_{t=0} = \sigma_0(x)\end{gathered} \tag{8}$$

Второе уравнение в (8) называется замыкающим уравнением, оно позволяет свести эту систему к одному уравнению (линейному одномерному уравнению Навье-Стокса при $\varepsilon > 0$)

$$\begin{gathered}\partial_t w(x,t) + v_e\, \partial_x w(x,t) = \varepsilon\, \partial_x^2 w(x,t), \quad (x,t)\in R^2_+ \\ w(x,t)|_{t=0} = w_0(x).\end{gathered} \tag{9}$$

В одной из последующих лекций, мы постараемся понять ту дополнительную информацию, которую предоставило нам расширение (7), чтобы объяснить возникшие трудности в проблеме существования классического решения задачи (2), с которыми мы столкнулись выше, и что важнее понять правило выбора пространства разрешимости (2). Замечательно то, что сама физика, вернее учет реальных задач, возникающих при реконструкции процесса, позволяет с успехом и как увидим с беспорной математической красотой выходить из трудностей.

С еще одной (универсальной) проблемой существания решения мы можем познакомиться, рассмотрев **обобщенную** задачу Коши для возмущения $v = v_r + \varepsilon\, w$, $\varepsilon \ll 1$, специального решения уравнения (2) $v_r(x,t) = x/t$( так называемой волны разряжения) с данными Коши на окржности $S_{(0,2)} = \{(t,x),\ x^2 + (t-2)^2 = 2\}$ радиуса $\sqrt{2}$ с центром в $(0,2)$ в окрестности точки $(1,1)$, т.е.

$$v|_{S_{(0,2)}} = \varphi,$$

где $\varphi-$ заданная функция на $S_{(0,2)}$. Возмущенное решение $v = v_r + \varepsilon\, w$, $\varepsilon \ll 1$, в первом приближении удовлетворяет уравнению

$$\partial_t w + \frac{x}{t}\partial_x w = 0 \quad \Rightarrow \quad t\partial_t w + x\partial_x w = 0,$$

одна из характеристик которого $x/t = \text{const}$ при $\text{const} = 1$ касается кривой $S_{(0,2)}$, где заданы данные Коши. В любой окрестности точки касания, выше каксательной, характеристики пересекают окружность в двух точках. Пюэтому данные Коши вблизи точки касания не могут быть любыми. Как мы отмечали выше, в этом случае нет окрестности точки касания $(1, 1)$, в которой существует классическое решение задачи Коши. Точки типа $(1, 1)$ называются характеристическими точками кривой задания данных Коши. Таким образом, для обобщенной задачи Коши есть проблема разрешимости для характеристической кривой задания данных Коши.

Мы выделили только часть из универсальных проблем теории уравнений с частными производными, предметом исследования которой, в общем случае, являются физические модели описываемые системами нелинейных уравнений (одним нелинейным уравнением)

$$L_j(u_1, \dots, u_N) \equiv F_j(\partial_x^\alpha u_1, |\alpha| \le m_1, \dots, \partial_x^\alpha u_N, |\alpha| \le m_N, x, t) = 0, \tag{10}$$

где $j = 1, \dots, N$, $x \in R^n$. Для линейных по $u$ функций $F_j$

$$L_j(u_1, \dots, u_N) \equiv \sum_{k=1}^{N} \sum_{|\alpha| \le m_k} a_{j,k}^\alpha(x) \partial_x^\alpha u_k = 0, \quad j = 1, \dots, N, \quad x \in R^n. \tag{11}$$

Здесь $m_k$ называется порядком системы относительно компоненты $u_k$ решения, $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$.

Для однородных распределений $\overline{u}$-однородных решений $\overline{u} = \overline{u}(t)$, независящих от пространственных переменых $x$, системы (10), (11) становятся системами обыкновенных уравнений(ОДУ)

$$L_j(u_1, \dots, u_N) \equiv F_j(\frac{d^\alpha}{dt^\alpha} u_1, |\alpha| \le m_1, \dots, \partial_x^\alpha u_N, |\alpha| \le m_N, x, t) = 0.$$

На самом деле связь между уравнениями в частных производных физики (уравнениями с распределенными параметрами) и ОДУ не столь формальная, а намного более содержательная. Как мы покажем в конце курса, ОДУ описывают главную часть решений уравнений с распределенными параметрами. Впервые с этим утверждением мы столкнулись при исследовании гладких решений уравнения Хопфа, когда по хараетеристикам-решениям ОДУ (3) мы востанавливали решение уравнения (2).

# МЕХАНИКА НЬЮТОНА, ЛАГРАНЖА, ГАМИЛЬТОНА.

## Лекция 2. Ньютоновская механика.

В этой лекции мы исследованием уравнения движения механики Ньютона
**Системы с одной степенью свободы.** Системой с одной степенью свободы мы будем называть систему, описываемую скалярным уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x), \quad x \in R \tag{12}$$

Кинетической энергией называется квадратичная форма

$$T = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{x})^2$$

Потенциальная энергия

$$U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(\xi)\ d\xi$$

Знак в этой формуле выбран так, чтобы потенциальная энергия камня была тем больше, чем выше он находится. Падение камня на Земле (из опыта) описывается уравнением

$$\overset{\circ\circ}{x} = -g, \quad g \approx 9.8\ m/c^2, \tag{13}$$

$x-$ высота камня над поверхностью Земли. Задание системы (12) задается потенциальной энергией. Полная энергия

$$E = T + U$$

это функция $E = E(x, \overset{\circ}{x})$

Теорема 0.1 (закон сохранения энергии): Полная энергия движущейся точки при движении (12) сохраняется, т.е. $E(x, \overset{\circ}{x})$ не зависит от $t$.

Имеем

$$\frac{d}{dt}(T + U) = \overset{\circ}{x}\overset{\circ\circ}{x} + \frac{dU}{dx}\ \overset{\circ}{x} = \overset{\circ}{x}\ (\overset{\circ\circ}{x} - f(x) = 0$$

**Фазовая плоскость.** Уравнение (12) эквивалентно системе двух уравнений

$$\overset{\circ}{x} = y, \quad \overset{\circ}{y} = f(x) \tag{14}$$

Рассмотрим плоскость с координатами $(x, y)$–фазовую плоскость уравнения (12). Точки фазовой плоскости называются фазовыми точками. Правая часть системы (14) определяет на фазовой плоскости векторное поле– векторное поле фазовой скорости. Решение системы (14)– это движение фазовой точки на фазовой плоскости $\varphi :\ R \to\ R^2$, при котором скорость движущейся точки в каждый момент времени равна вектору фазовой скорости в том месте, где фазовая точка в данный момент времени находится. Образ отображения $\varphi$ называется фазовой кривой. Таким образом фазовая кривая задается параметрическим уравнением

$$x = \varphi(t), \quad y = \overset{\circ}{\varphi}\ (t).$$

**Задача.** *Докажите, что через каждую фазовую точку проходит одна и только одна фазовая кривая.* Если два решение $x_1(t),\ x_2(t)$, то

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] \leq\ C[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]$$

Отсюда

$$[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2]() \leq\ 2C|\int_{t_0}^{t}[(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2](s)ds| \leq$$

$$2C|t-t_0|\max_{s\in[t_0,t]}[(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2](s)$$

что приводит к противоречию, если $2C|t-t_0|<1$.

Фазовая кривая может состоять из одной точки. Такая точка называется положением равновесия. Вектор фазовой скорости в точки равновесия равен нулю.
Закон созранения полной энергии позволяет находить фазовые кривые.Каждая фазовая кривая принадлежит множеству уровня энергии $E(x,\mathring{x})=h$.
**Примеры.**
1. Основное уравнение теории колебаний

$$\overset{\circ\circ}{x}=-x$$

Тогда

$$T=\frac{1}{2}(\mathring{x})^2,\quad U=\frac{1}{2}x^2,\quad E=\frac{1}{2}(\overset{\circ\circ}{x})^2+\frac{1}{2}x^2$$

Множества уровня энергии–концетрические окружности и начало координат.

2) Пусть потенциальная энергия задана графиком (попа Ландау). Нарисуем множества уровня полной энергии $E=y^2/2+U(x)$.

a) Положение равновесия системы (14) лежит на оси $y=0$ фазовой плоскости, точка $(x,0)$ положение равновесия определяется критическими точками потенциальной энергии $\frac{d}{dx}U=0$.

b) Каждое множество уровня– гладкая кривая в окрестности каждой своей точки, не являющаяся положением равновесия(это следует из теоремы о неявной функции). В частности, если число $E$ не критическое значение потенциальной энергии(т.е. не равно значению потенциальной энергии в одной из критических точек), то множество уровня, где энергия равна $E$,- гладкая кривая. "Кинетическая энергия"отрицательна–значит, что потенциальная не больше полной. Чем потенциальная энергия меньше, тем скорость больше. Шарик не может выскочить из потенциальной ямы–поднятся выше уровня определяемого его начальной энергией.
**Задачи.**
1. Доказать это.
2. Из скольких фазовых кривых состоит сепаратриса(из трех, одна из кривых-точка равновесия). Определить время движения по сепаратрисе(из теоремой единственности бесконечное)

**Фазовый поток.** Пусть $M-$ точка фазовой плоскости. Рассмотрим решение системы (14), начальные условия которого при $t=0$ изображается точкой $M$. Предположим, что любое решение системы продолжается на всю ось времени. Значение нашего решения при некотором $t$ зависит от $M$. Мы обозначим полученную фазовую точку $M(t)=g^tM$. Таким образом, мы определили отображение фазовой плоскости на себя $g^t:\ R^2\to\ R^2$. По известным теоремам ОДУ отображение $g^t$ является диффеоморфизмом (взаимн. однозн. и взаимн. дифференц. отображ.) Диффеоморфизм $g^t,\ t\in R$ образует группу $g^{t+s}=g^t\circ g^s$. Отображение $g^0$ тождественное ($g^0M=M$), а отображение $g^{-t}$ обратно $g^t$. $g:\ \ R\times R^2\to\ \ R^2,\ g(t,M)=g^tM$, дифференцируемо. Это все говорит о том, что $g^t$ образуют однопараметрическую группу диффеоморфизмов фазовой плоскости. Эту группу называют также фазовым потоком, заданным системой (14)(или уравн. (12)).

**Задачи.**

1. Фазовый поток, заданный уравнением $\ddot{x} = -x$ есть группа $g^t$ поворотов фазовой плоскости на угол $t$ вокруг начала координат.

2. Покажите, что система с потенциалом $U = -x^4$ никакого фазового потока не определяет (Воспольз. законом сохранения энергии для доказательства неограниченности продолжаемого решения)

3. Если $U > 0$ фазовый поток существует.

4. Нарисовать образ круга $x^2 + (y-1)^2 < 4$ под действием преобразования фазового потока а) перевернутого маятника $\ddot{x} = x$, б) нелинейным маятником $\ddot{x} = -\sin(x)$.

**Системы с двумя степенями свободы.** Исслед. общей потенц. сист. с двумя степен. свобод. выходит за рамки современ. науки. Поэтому примеры. Под системой с двумя степен. свобод. мы будем понимать систему

$$\ddot{x} = f(x), \quad x \in R^2$$

$f-$ векторное поле на плоскости. Система называется потенциальной, если существует $U : R^2 \to R$, что $f = -\partial U/\partial x$.

$$\ddot{x} = -\nabla_x U.$$

**Закон сохранения энергии.** Полная энергия потенциальной системы

$$\frac{1}{2}|\dot{x}|^2 + U(x), \quad |\dot{x}|^2 = (\dot{x}, \dot{x}),$$

сохраняется. Имеем

$$\frac{dE}{dt} = (\dot{x}, \ddot{x}) + (\nabla_x U, \dot{x}) = (\ddot{x} + \nabla_x U, \dot{x}) = 0$$

в силу уравнения движения.

**Следствие.** Если в начальный момент суммаргая энергия равна $e$, то вся траектория лежит в области $U(x) \leq E$, т.е. точка находится все время внутри потенциальной ямы $U(x_1, x_2) \leq E$. В системе с одной степенью свободы всегда можно ввести потенц. энергию $U(x) = -\int_{x_0}^{x} f(\xi|d\xi$. Для системы с двумя степен. свободы это не так.

**Задача.** привести пример системы $\ddot{x} = f(x)$, которая не является потенциальной.

**Фазовое пространство.** Уравнение движения (12) можно записать как систему

$$\dot{x}_1 = y_1, \quad \dot{x}_2 = y_2, \tag{15}$$

$$\dot{y}_1 = -\frac{\partial U}{\partial x_1}, \quad \dot{y}_2 = -\frac{\partial U}{\partial x_2} \tag{16}$$

Фазовое пространство $(x_1, x_2, y_1, y_2)$. Система (15) задает векторное поле фазовой скоростив четырехмерном пространстве и тем самым фазовый поток нашей системы(однопараметр группу диффеоморфизмов четырехмерного фазового пространства). Фазовые кривые этой системы являются подмножеством четырехмерного фазового пространства. Все фазовое пространство разбивается на фазовые кривые. Прекция фазовых кривых из 4-мерного пространства на плоскость $(x_1, x_2)$ дают траектории нашей движущейся точки на плоскости $(x_1, x_2)$. Эти траектории называют также орбитами. Орбиты могут иметь точки пересечения, тогда как фазов. крив. не имеют точек пересечения. Уравнение закона сохранения

$$E = \frac{y_1^2 + y_2^2}{2} + U(x_1, x_2)$$

определяет трехмерную гиперповерхность в 4-мерн. пространстве. Эта поверхн. $\Pi_{E_0}$ остается инвариантной относительно фазового потока $g^t \Pi_{E_0} = \Pi_{E_0}$. Можно сказать что фазовый поток течет по поверхности уровня энергии. Векторное поле фазовой скорости касается в каждой точке этой поверхности. Следовательно вся она составлена из фазовых кривых.

**Пример.**(малые колебания сферического маятника). Пусть $U = (x_1^2 + x_2^2)/2$ Множества уровня потенц. энергии на плоскости $(x_1, x_2)$ будут концетрическими окружностями. Уравнения движения $\overset{\circ\circ}{x}_1 = -x_1$, $\overset{\circ\circ}{x}_2 0 = -x_2$ эквивалентны системе

$$\overset{\circ}{x}_1 = y_1, \quad \overset{\circ}{x}_2 = y_2,$$

$$\overset{\circ}{y}_1 = -x_1, \quad \overset{\circ}{y}_2 = -x_2$$

Эта система распадается на две, каждая из координат $x_1, x_2$ меняется со временем так же, как в системе с одной степенью свободы. Решение имеет вид

$$x_1 = c_1 \cos t + c_2 \sin t, \quad x_2 = c_3 \cos t + c_4 \sin t,$$

$$y_1 = -c_1 \sin t + c_2 \cos t, \quad y_2 = -c_3 \sin t + c_4 \cos t$$

Из закона сохранения

$$E = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2) = \mathrm{const}$$

т.е. поверхностью $\Pi_E$ является сфера в 4-мерном пространстве.

**Задача** Доказать, что фазовые кривые являются большими кругами этой сферы(пересечение сферы и двумерной плоскости, проходящей через ее центр). Нарисовать орбиты.

**Пример 2.**(фигуры Лиссажу) малые колебания с двумя степенями собода:

$$\overset{\circ\circ}{x}_1 = -x_1, \quad \overset{\circ\circ}{x}_2 = -\omega^2 x_2$$

Потенциальная энергия

$$U = \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} \omega^2 x_2^2$$

полная энергия

$$E = \frac{1}{2} \overset{\circ}{x}_1^{\,2} + \frac{1}{2} \overset{\circ}{x}_2^{\,2} + U(x_1, x_2)$$

то все движение будет внутри эллипса $U(x_1, x_2) \leq E$. Опять система распадается на две одномерные системы, для которых сохраняются энергии

$$E_1 = \frac{1}{2} \overset{\circ}{x}_1^{\,2} + \frac{1}{2} x_1^2, \quad E_2 = \frac{1}{2} \overset{\circ}{x}_2^{\,2} + \frac{1}{2} x_2^2,$$

$$E = E_1 + E_2$$

Следовательно, изменение $x_1$ ограничено полосой $|x_1| \leq A_1, \quad A_1 = \sqrt{2E_1(0)}$, и $x_2$ тоже колеблется в пределах $|x_2| \leq A_2, \quad A_2 = \sqrt{2E_2(0)}$. пересечение этих двух полос определяет прямоугольник, в котором заключена орбита. Решение $x_1 = A_1 \sin(t + \varphi_1), \; x_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$. Движущаяся точка независимо совершает колебания с частотой 1 и амплитудой $A_1$ по горизонтали и колебания с частотой $\omega$ и амплитудой $A_2$ по вертикали. Орбита-Фигуры Лиссажу удобно наблюдать на осциллографе, подавая два независимых гармонических колебания на горизонтальную и вертикальную развертки. $\omega$ сильно меняет вид Фигур Лиссажу.

**Потенциальное силовое поле.** Работа постоянной силы $F$ на пути $S = M_1M_2$ есть скалярное произведение

$$A = (F, S) = |F||s| \cos \varphi$$

Пусть дано векторное поле $F$ и кривая $l$ конечной длины. Приблизим кривую ломанными со звеньями $\Delta S_i$

$$A = \lim_{|\Delta S_i| \to 0} \sum_i (F_i, \Delta S_i) \to \int_l (F, dS)$$

**Условие потенциальности поля.** Векторное поле $F$ потенциально тогда и только тогда, когда его работа по любому пути $M_1M_2$ зависит только от концов пути и не зависит от формы пути. Действительно, пусть работа поля $F$ не зависит от пути. Тогда корректно определяем функцию

$$U(M) = \int_{M_0}^{M} (F, dS) \quad \Rightarrow \quad F = -\nabla_x U,$$

т.е. поле потенциально. Обратно, если $F$ потенциально и $U$ его потенциал, то

$$\int_{M_0}^{M} (F, dS) = -\int_{M_0}^{M} (\nabla_x U, dS) = -U(M) + U(M_0),$$

т.е. работа не зависит от пути.
**Задача.** Доказать, что векторное поле $F_1 = x_2, \; F_2 = -x_1$ не потенциально

**Центральное поле.** Векторное поле на плоскости $E^2$(евклидово пространство) называется центральным с центром в $O$, если оно инвариантно относительно группы движений плоскости, оставляющих точку $O$ на месте(повороты и отражения). Докажите, что вектора центрального поля $v = \Phi(|r|)e_r$. Ньютоновское поле $F = -kr/|r|^3$ центрально в $R^3$ без $O$.

Предложение 0.1: Всякое центральное поле $F$ потенциально, а его потенциальная энергия зависит только от расстояния до центра поля $U = U(|r|)$

Действительно,

$$\int_{M_0}^{M} (F, dS) = \int_{|M_1|}^{|M_2|} \Phi(s) ds,$$

а этот интеграл не зависит от пути.
**Задача.** Вычислить потенц. энергию ньютоновского поля.

## Лекция 3. Лагранжева механика.

Лагранжева механика описывает движение механической системы при помощи конфигурационного пространства(локально $E^n$). Конфигурационного пространства механической системы имеет структуру дифференцируемого многообразия. Лагранжева механическая система задается многообразием

(конфигурационным пространством) и функцией $L(q, \overset{\circ}{q}, t)$ на его касательном расслоении(функцией Лагранжа). Каждая олднопараметрическая группа диффеоморфизмов конфигурационного пространства, оставляющая неизменной функцию Лагранж, определяет закон сохранения(т.е. первый интеграл уравнения движения.) Основные понятия и теремы лагранжевой механики(даже если они и формулируются в терминах локальных координат) инвариантны относительно этой группы. Ньютоновская потенциальная система–частный случай лагранжевой(конфигурационное пространсто в этом случае евклидово, а функция Лагранжа равна разности $L = T - U$ кинетической и потенциальной энергий). Лагранжева точка зрения позволяет исследовать до конгца ряд важных залдач механики, например в теории малых колебаний и в динамике твердого тела. Переход от Лагрпанжевой механики к Гамильтоновой в $2n-$ мерном фазовом пространстве $(p, q)$ обобщенного импульса и обобщенной координаты описывается уравнением

$$p = \partial_{\overset{\circ}{q}} L(q, \overset{\circ}{q}, t)$$

так что траектории процесса в Лагранжевой механике переходят в траектории процесса в механике Гамильтона. Обратный переход от механики Гамильтона к механике Лагранжа мы исследуем в следующей лекциип

**Вариационный принцип.** В этом параграфе покажем, что **движения ньютоновской потенциальной системы** является экстремалями вариационного принципа, так называемого **принципа наименьшего действия Гамильтона.** Вариационное исчисление занимается отысканием экстремумов функций, одласть определения которых–бесконечномерное пространство(пространство кривых). Такие функции называются **функционалами.** Примером является длина кривой на евклидовой плоскости

$$\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{1 + \overset{\circ}{x}{}^2}\, dt, \quad \gamma = \{t, x;\ x = x(t),\ t_0 \le t \le t_1.\}$$

****************

парадокс для треугольника(сумма двух сторон равна третьей). В чем пробел в доказательстве?

******************

Вообще функционалом называется всякое отображение пространства кривых в числовую ось. Рассмотрим "близкую"к $\gamma$ кривую $\gamma' = \{t, x;\ x = x(t) + h(t)\} = \gamma + h$. Равссмотрим приращение функционала $\Phi(\gamma + h) - \Phi(\gamma)$

Определение 0.1 (Вариация): Функционал $\Phi$ называется дифференцируемым, если $\Phi(\gamma+h)-\Phi(\gamma)=F+R$, где $F$ линейно зависит от $h$(т.е. при фиксированном $\gamma$ имеем $F(h_1+h_2)=F(h_1)+F(h_2),\ F(ch)=cF(h),\ c=\mathrm{const}$, а $R(\gamma,h)=O(h^2)$ в том смысле, что из $|h|\le\varepsilon,\ |dh/dt|\le\varepsilon$ вытекает, что $|R|\le C\varepsilon^2$. Линейная часть приращения $F(h)$ называется дифференциалом(вариацией) $F=d\Phi$ а $h$ –вариацией кривой. Если $\Phi$ дифференцируема, то $d\Phi$ определяется однозначно.

**Пример.** Пусть $\gamma=\{t,x;\ x=x(t),\ t_0\le t\le t_1\}$ кривая на плоскости $(t,x)$; $L(a,b,c)-$ дифференцируемая функция трех переменных. Составим функционал

$$\Phi(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1} L(x(t),\overset{\circ}{x}(t),t)\ dt \tag{17}$$

Например $L=\sqrt{1+b^2}$ дает длину кривой $\gamma$.

Теорема 0.2: Функционал (17) дифференциремый и его дифференциал дается формулой

$$F(h)=\int_{t_0}^{t_1}\Big[\partial_x L-\frac{d}{dt}\partial_{\overset{\circ}{x}}L\Big]h\ dt+\Big(\partial_{\overset{\circ}{x}}L\,h\Big)\Big|_{t_0}^{t_1}.$$

$\partial_x g=\frac{\partial g}{\partial x}$

Действительно, имеем

$$\Phi(\gamma+h)-\Phi(\gamma)=\int_{t_0}^{t_1}\Big[L(x+h,\overset{\circ}{x}+\overset{\circ}{h},t)-L(x,\overset{\circ}{x},t)\Big]dt=$$

$$=\int_{t_0}^{t_1}\Big[\partial_x L(x,\overset{\circ}{x},t)h+\partial_{\overset{\circ}{x}}L(x,\overset{\circ}{x},t)\ \overset{\circ}{h}\ \Big]dt+O(h^2)=F(h)+R$$

$$F(h)=\int_{t_0}^{t_1}\Big[\partial_x L(x,\overset{\circ}{x},t)h+\partial_{\overset{\circ}{x}}L(x,\overset{\circ}{x},t)\ \overset{\circ}{h}\ \Big]dt,\quad R=O(h^2)$$

Интегрируя по частям, находим

$$\int_{t_0}^{t_1}\partial_{\overset{\circ}{x}}L(x,\overset{\circ}{x},t)\ \overset{\circ}{h}\ dt=-\int_{t_0}^{t_1}\frac{d}{dt}\partial_{\overset{\circ}{x}}L(x,\overset{\circ}{x},t)\ h\ dt+\Big(\partial_{\overset{\circ}{x}}L(x,\overset{\circ}{x},t)\ h\Big)\Big|_{t_0}^{t_1}$$

Определение 0.2 (Экстремали.): Экстремалью дифференцируемого функционала $\Phi(\gamma)$ называется такая кривая $\gamma$, что $F(\gamma,h)=0$ при любом $h$(точно также, как $\gamma-$ стационарная точка функции, если в этой точке дифференциал равен нулю).

Теорема 0.3: Чтобы кривая $\gamma: x=x(t)$ была экстремалью функционала $\Phi(\gamma)=\int_\gamma L(x,\overset{\circ}{x},t)dt$ на пространстве кривых, прходящих через точки $x(t_0)=x_0,\ x(t_1)=x_1$ необходимо и достаточно, чтобы вдоль кривой $x(t)$

$$\frac{d}{dt}(\partial_{\overset{\circ}{x}}L)-\partial_x L=0 \tag{18}$$

Лемма 0.1: Если непрерывная функция $f(t),\ t_0 \leq t \leq t_1$ такова что

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t)h(t)dt = 0$$

для любой непрерывной(или хотябы любой бесконечно дифференцируемой) функции $h(t)$, для которой $h(t_0) = h(t_1) = 0$, то

$$f(t) \equiv 0. \tag{19}$$

Факт очевидный. Если не выполнено (19) то есть точка где $f(t_*) \neq 0$. Пусть для определенности $f(t_*) > 0$. Тогда в силу непрерывности есть окрестность $(t_* - \varepsilon, t_* + \varepsilon) \subset (t_1, t_2)$, $\varepsilon > 0$, в которой $f(t) > 0$. Теперь выберем непрерывную функцию $h_*(t) \equiv 0$ вне этого интервала и $h_*(t) > 0$, $\forall t \in (t_* - \varepsilon, t_* + \varepsilon)$. Отсюда следует, что $\int_{t_0}^{t_1} f(t)h_*(t)dt > 0$. Полученное противоречие доказывает, что $f(t_*) = 0$, $\forall t_0 < t_* < t_1$.

Теперь докажем теорему (0.73). По предыдущей теореме

$$F(h) = \int_{t_0}^{t_1} \Big[\partial_x L - \frac{d}{dt}\partial_{\overset{\circ}{x}} L\Big]h\ dt,$$

поскольку $\Big(\partial_{\overset{\circ}{x}} L\, h\Big)\Big|_{t_0}^{t_1} = 0$ так как для вариаций $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Если $\gamma$ экстремаль, то $F(\gamma, h) = 0$ для всех $h$, для которых $h(t_0) = h(t_1) = 0$. Тогда по лемме

$$\frac{d}{dt}\partial_{\overset{\circ}{x}} L - \partial_x L \equiv 0$$

Это уравнение называется уравнением Эйлера-Лагранжа для функционала

$$\Phi(\gamma) = \int_\gamma L(x, \overset{\circ}{x}, t)\ dt$$

**Пример.** $L = \sqrt{1 + \overset{\circ}{x}{}^2} \ \Rightarrow\ \partial_x L = 0,\ \partial_{\overset{\circ}{x}} L = \overset{\circ}{x} / \sqrt{1 + \overset{\circ}{x}{}^2}$. Экстремаль определяется уравнением

$$\frac{d}{dt}\Big(\frac{\overset{\circ}{x}}{\sqrt{1 + \overset{\circ}{x}{}^2}}\Big) = 0,$$

т.е. $\overset{\circ}{x} / \sqrt{1 + \overset{\circ}{x}{}^2} = \text{const} \Rightarrow \overset{\circ}{x} = c_1 \Rightarrow$

$$x = c_1 t + c_2$$

Таким образом, экстремали функционала длины $C^1$ кривых связывающих точки $x|_{t=t_1} = x_1$ и $x|_{t=t_2} = x_2$ есть прямые(мы уточнили множество(класс) кривых $\gamma$).
**Вопрос:** а если рассмотреть все непрерывные кривые, у которых определена длина. Экстремаль изменится?

**Уравнение Эйлера-Лагранжа.** Пусть теперь $x-$ вектор $n-$ мерного пространства $R^n$, $\gamma = \{t, x;\ x = x(t),\ t_0 \leq t \leq t_1\}-$ кривая $(n+1)$ мерного пространства $R \times R^n$, $L : R^n \times R \to R$ функция $2n+1$ аргумента. Аналогично доказывается

Теорема 0.4: Чтобы кривая $\gamma$ была экстремалью функционала $\Phi(\gamma) = \int_\gamma L(x, \overset{\circ}{x}, t)\, dt$ на пространстве кривых $x(t)$, соединяющих заданные точки $(t_0, x_0)$, $(t_1, x_1)$ необходимо и достаточно выполнения вдоль нее уравнения Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}(\nabla_{\overset{\circ}{x}} L) - \nabla_x L = 0$$

Это система $n-$ уравнений второго порядка, и решение зависит от $2n$ произвольных постоянных. Для нахождения их служат $2n$ условий $x(t_0) = x_0,\ x(t_1) = x_1$.
**Всегда возникает вопрос–в каком классе существует решение этого уравнения, может и обобщенное.**
**Задача.** Приведите примеры, когда экстремалей, соединяющих две данные точки много и когда их нет совсем.

1. $L = \frac{1}{2} \overset{\circ}{x}{}^2 - \frac{1}{2} x^2$. Тогда уравнение Эйлера-Лагранжа–уравнение маятника:

$$\frac{d}{dt}(\overset{\circ}{x}) + x = 0 \tag{20}$$

Если рассмотреть условие $x(0) = x(\pi) = 0$, то два решение $x \equiv 0$ и $x = \sin(t)$.

2. Если рассмотреть условия(ограничения) $x(0) = 0,\ x(\pi) = 10$ то таких гладких экстремалей нет–модуль $|x|$ любого гладкого решения не превосходит 1. Т.е. в классе гладких кривых минимум функционала не достижим. Есть ли какие нибудь обобщенные решения?

**Замечание Свойства кривой $\gamma$ быть экстремалью функционала не зависит от выбора системы координат**. Например, функционал–длина кривой, в декартовых и полярных координата дается разными формами

$$\Phi = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\overset{\circ}{x}_1{}^2 + \overset{\circ}{x}_2{}^2}\, dt, \quad \Phi = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\overset{\circ}{r}{}^2 + r^2 \overset{\circ}{\varphi}{}^2}\, dt$$

Экстремали одни и теже–прямые линии на плоскости. Уравнения прямых в декартовых и полярных координатах задаются различными функциями

$$x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t), \quad r = r(t),\ \varphi(t).$$

Однако и те и другие функции удовлетворяют уравнению Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}(\nabla_{\overset{\circ}{x}} L) - \nabla_x L = 0$$

только в первом случае в переменных $x = (x_1, x_2)$, $L = \sqrt{\overset{\circ}{x}_1{}^2 + \overset{\circ}{x}_2{}^2}$, а во втором –$x = (r, \varphi)$, $L = \sqrt{\overset{\circ}{r}{}^2 + r^2 \overset{\circ}{\varphi}{}^2}$. Таким образом, мы можем записать экстремальную задачу в любой системе координат.

**Уравнение Лагранжа.** Сравним уравнение динамики Ньютона системы $n$ материальных точек

$$\frac{d}{dt}(m_i \overset{\circ}{x}_i) + \partial_{x_i} U = 0 \tag{21}$$

с уравнением Эйлера-Лагранжа

$$\frac{d}{dt}(\nabla_{\overset{\circ}{x}} L) - \nabla_x L = 0 \tag{22}$$

Теорема 0.5 (Принцип наименьшего действия Гамильтона): Движение механической системы (21) совпадает с экстремалями функционала $\Phi(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L dt$, где $L = T - U$.

Здесь $U = U(x), T = \sum m_i \frac{1}{2} \overset{\circ}{x}_i$. То имеем

$$\partial_{x_i} L = -\partial_{x_i} U, \quad \partial_{\overset{\circ}{x}_i} L = m_i \overset{\circ}{x}_i,$$

т.е. (23) есть уравнение Ньютона.

Заключение 0.1: Пусть $(q_1, \ldots, q_n)$ любые координаты в конфигурационном пространстве системы $n$ материальных точек. Тогда изменение $q$ со временем подчиняется уравнению Эйлера

$$\frac{d}{dt}(\nabla_{\overset{\circ}{q}} L) - \nabla_q L = 0 \tag{23}$$

По предыдущей теореме движение–экстремаль функционала $\int_{t_0}^{t_1} L dt$, следовательно в любой системе координат удовлетворяет записанному в этой системе уравнению Эйлера-Лагранжа.

Определение 0.3: В механике приняты следующие наименования

$$L(q, \overset{\circ}{q}, t) = T - U - -\text{лагранжиан, функция Лагранжа}$$

$$\int_\gamma L dt - -\text{функционал действия}$$

$$q_i - -\text{обобщенные координаты}$$

$$\overset{\circ}{q}_i - -\text{ обобщенные скорости}$$

$$p_i = \partial_{\overset{\circ}{q}_i} L - -\text{обобщенные импульсы}$$

$$\partial_{q_i} L - -\text{обобщенные силы}$$

В последней теореме в некоторых случаях движение $q(t)$ является не только экстремалью, но и **доставляет наименьшее значение функционалу действия** $\int_\gamma L dt$

**Пример 1.** Для свободной материальной точки в $E^3$

$$L = T = \frac{m \overset{\circ}{x}^2}{2}$$

в декартовых координатах $q_i = x_i$, и $L = m(\overset{\circ}{q}_1^2 + \overset{\circ}{q}_2^2 + \overset{\circ}{q}_3^2)/2$. Здесь обобщенные скорости–компоненты вектора скорости, обобщенные импульсы-$p_i = m \overset{\circ}{q}_i$–компоненты вектора количества движения, уравнение Лагранжа совпадает с уравнением Ньютона $d\overline{p}/dt = 0$. Экстремали являются прямыми линиями. Из принципа Гамильтона следует, что прямые являются не только кратчайшими(т.е. экстремалями длины $\int_{t_0}^{t_1} \sqrt{\overset{\circ}{q}_1^2 + \overset{\circ}{q}_2^2 + \overset{\circ}{q}_3^2 dt}$), но и экстремалями действия $\int_{t_0}^{t_1} (\overset{\circ}{q}_1^2 + \overset{\circ}{q}_2^2 + \overset{\circ}{q}_3^2) dt$.

**Задача.** Докажите, что экстремаль дает минимум действия.

## Лекция 4. Уравнение Гамильтона.

**Преобразование Лнжандра.** Чтобы определить механику Гамильтона, вводимую функцией Гамильтона $H(p,q,t)$ на фазовом пространстве переменных $(p,q)$, и доказать эквивалентноность двух механик-Гамильтона и Лагранжа, установить связь функцией Гамильтона $H(p,q,t)$ и Лагранжа $L(q,\overset{\circ}{q},t)$, нам понадобить преобразование Лнжандра (вспомогательный математический прием, состоящий в переходе от функций на векторном пространгстве к функциям на сопряженном пространстве). Это сродни построению сопряженного банахова пространства. Оно часто встречается в физике(напрмер при определении термодинамических величин).

Для выпуклой функции $y = f(x),\ f''(x) > 0$, и данного числа $p$ положим $px - f(x) = F(p,x)$. Функция $F(p,x)$ в точке $x(p)$ имеет максимум($F(p,0) = F(p,x_1(p)) = 0$, где $x(p)$ определяет единственную точку пересечения прямой $y = px$ и графика функции $f(x)$, $F(p,x) > 0$ для $0 < x < x_1(p)$.) Тогда преобразование фурье

$$g(p) = F(p,x(p))$$

Максимум $x(p)$ опреляется из условия экстремума $\partial_x F(x,p) = 0$, т.е. определяется из уравнения $f'(x) = p$. Ввиду выпуклости такая точка $x(p)$ единственна.

**Примеры**

1. Для $f(x) = x^2$ имеем $x(p) = p/2$ и $g(p) = \frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{4}p^2 = \frac{1}{4}p^2$. Также для $f(x) = mx^2/2$ получим $g(p) = p^2/2m$.

2. Для $f(x) = x^\alpha/\alpha$ имеем $x(p) = p^{1/(\alpha-1)}$ и $g(p) = p^\beta/\beta,\ \ \beta = \alpha/(\alpha-1)$, $1/\alpha + 1/\beta = 1,\ \alpha > 1, \beta > 1$

3. Пусть $f(x)$– выпуклая ломанная. Тогда $g(p)$–тоже выпуклая ломанная, причем вершинам $f(x)$ соответствуют отрезки $g(p)$, а отрезкам $f(x)$ вершины $g(p)$. Например угол переходит в отрезок (рис.)

**Инволютивность.** Будем считать функцию $f(x)$ нужное число раз дифференцируемой, а $f''(x) > 0$. Легко проверить, что преобразование Лежандра переводит выпуклую функцию в выпуклую. Поэтому это можно применить дважды.

Теорема 0.6: Преобразование Лежандра инволютивно, т.е. его квадрат равен тождественному преобразованию(если $f$ переходит в $g$, то $g$ переходит снова в $f$).

Положим $G(x,p) = xp - g(p)$. Точка $p(x)$– точка максимума $G$, т.е. $\partial_p G = 0 \Rightarrow\ g'(p) = x$. Тогда $h(x) = G(x,p(x))$. Докажите, что $f(x) = h(x)$.

Заключение 0.2: Пусть дано семейство прямых $y = px - g(p)$. Тогда огибающая имеет уравнение $y = f(x)$, где $f(x)$ преобразование Лежандра функции $g$.

**Случай многих переменных.** $f(x)$– выпуклая функция векторного переменного $x = (x_1, \ldots, x_n)$. Тогда преобразование Лежандра

$$g(p) = F(x,x(p)) = \max_x F(p,x), \quad F(p,x) = (p,x) - f(x),\ p = \nabla_x f(x).$$

**Уравнения Гамильтона.** В предыдущей лекции мы ввели преобразование Лежандра. В этой лекции мы покажем, что преобразованием Лежандра лагранжева система дифференциальных уравнений второго порядка переходит в замечательно симметричную систему $2n$ уравнений первого порядка–систему уравнений Гамильтона(или канонических уравнений).

**Эквивалентность уравнений Лагранжа и Гамильтона.** рассмотрим систему Лагранжа

$$\frac{d}{dt}p = \partial_q L, \quad p = \partial_{\mathring{q}} L$$

Функцию Лагранжа предположим выпуклой относительно второго аргуменьа $\mathring{q}$ .

Теорема 0.7: Система уравнений Лагранжа эквивалентна системе $2n$ уравнений первого порядка–систему уравнений Гамильтона:

$$\frac{d}{dt}p = -\partial_q H, \quad \mathring{q} = \partial_p H$$

где функция Гамильтона

$$H(p, q, t) = p\,\mathring{q} - L(q, \mathring{q}, t)$$

преобразование Лежандра по второй переменной $\mathring{q}$ .

Действительно, $H(p) = p\,\mathring{q} - L(q, \mathring{q}, t)$, в которой $\mathring{q}$ выражается через $p$ по формуле $p = \partial_{\mathring{q}} L$. Полный дифференциал функции Гамильтона

$$dH = \partial_p H dp + \partial_q H dq + \partial_t H dt$$

равен полному дифференциалу $p\,\mathring{q} - L$ при $p = \partial_{\mathring{q}}$ :

$$dH = \mathring{q}\, dp - \partial_q L dq - \partial_t L dt,$$

где мы воспользовались $(p - \partial_{\mathring{q}} L) d\,\mathring{q} = 0$. Оба выражения должны совпадать

$$\mathring{q} = \partial_p H, \quad \partial_q H = -\partial_q L, \quad \partial_t H = -\partial_t L$$

Принимая во внимание уравнения Лагранжа $\frac{d}{dt}p = \partial_q L$ получим второе уравнение системы Гамильтона

$$\frac{d}{dt}p = -\partial_q H.$$

Итак, если $q(t)$ удовлетворяет уравнениям Лагранжа, то $(p(t), q(t))$ удовлетворяют уравнениям Гамильтона. Обратное доказывается аналогично, т.е. системы Лагранжа и Гамильтона эквивалентны.(это относится ко всем вариационным задачам)

**Функция Гамильтона и энергии.** Рассмотрим пример $L = T - U$, где кинитическая энергия $T = \frac{1}{2} \sum a_{ij}\, \mathring{q}_i \mathring{q}_j, \ a_{ij} = a_{ji}(q, t), \ U = U(q)$.

Теорема 0.8: При сделанных предположениях функция Гамильтона $H$ есть полная энергия $H = T + U$.

Лемма 0.2: Значения квадратичной формой $f(x)$ и ее преобразования Лежандра $g(p)$ в соответствующих точках совпадают $f(x) = g(p),\ p = f'(x),\ x = g'(p)$.

Для $f(x) = mx^2/2$ имеем $p = mx,\ g(p) = p^2/2m = mx^2/2 = f(x)$. Теперь докажем лемму. По теореме Эйлера об однородных функциях

$$x\partial_x f = 2f.$$

Следовательно

$$g(p(x)) = px - f(x),\ p = \partial_x f\ \Rightarrow\ g(p(x)) = 2f - f = f(x)$$

Теперь доказательство теоремы. В силу леммы

$$H = p \overset{\circ}{q} - L = 2T - (T - U) = T + U$$

**Пример.** Для одномерного движения

$$\overset{\circ\circ}{q} = -\partial_q U$$

Тогда $T = \overset{\circ}{q}^2/2, U = U(q), p = \overset{\circ}{q}, H = p^2/2 + U(q)$ и уравнения Гамильтона принимают вид

$$\overset{\circ}{q} = p,\quad \overset{\circ}{p} = -\partial_q H$$

Из теоремы об эквивалентности уравнений движения вытекает ряд следствий. Например закон сохранения энергии

Заключение 0.3: Справедливо равенство $\frac{d}{t}H = \partial_t H$. Отсюда для автономной системы(функция Гамильтона явно не зависит от $t$) выполнен закон сохранения

$$H(q(t), P(t)) = \mathrm{const}$$

Действительно, вдоль траектории

$$\frac{d}{t}H = \partial_t H + \overset{\circ}{p}\, \partial_p H + \overset{\circ}{q}\, \partial_q H = \partial_t H.$$

**Циклические координаты.** Рассматривая центральное поле, мы заметили, что введением полярных координат задача сводится к одномерной. Оказывается, всякая симметрия задачи, позволяющая выбрать систему координат $q$ так, чтобы от некоторых координат функция Гамильтона не зависила, позволяет найти некоторые первые интегралы и свести такую задачу к задаче с меньшим числом координат.

Определение 0.4: Если координата $q_1$ не входит в функцию Гамильтона, так что $\partial_{q_1} H = 0$, то такая координата называется циклической (например угловая координата в центральном поле). Очевидно, координата $q_1$ циклическая тогда и только тогда, когда она не взодит в функцию Лагранжа $\partial_{q_1} L = 0$.

Из гамильтонова вида уравнений вытекает

Заключение 0.4: Пусть $q_1$ циклическая координата. Тогда $p_1-$ первый интеграл. При этом изменение остальных координат со временем такое же, как в системе с $n-1$ независимой координатой $q_2, \ldots, q_n$ и с функцией Гамильтона

$$H(p_2, \ldots, p_n; q_2, \ldots, q_n, t, c)$$

зависящей от параметра $c = p_1$.

Положим $p' = (p_2, \ldots, p_n),\ q' = (q_2, \ldots, q_n)$. Тогда

$$\frac{d}{dt}q' = \partial_{p'}H, \quad \frac{d}{dt}p' = \partial_{q'}H, \tag{24}$$

$$\frac{d}{dt}q_1 = \partial_{p_1}H,\ \frac{d}{dt}p_1 = 0$$

Если система (24) $2n-2$ уравнений решена, то $q_1(t)$ находим из уравнения

$$\frac{d}{dt}q_1 = \partial_{p_1}H(p_1, p'(t), q'(t), t)$$

и это легко интегрировть.

Заключение 0.5: Автономная система с двумя степенями свободы($n = 2$), имеющая циклическую координату, интегрируема. Ибо в этом случае система для $p', q'$ одномерная и немедленно интегрируема с помощью интеграла $H(p', q') = \text{const}$.

**Теорема Лиувилля.** Фазовый поток гамильтоновых уравнений сохраняет фазовый объем. Отсюда вытекает, например, что устойчивость в гамильтоновой системе не может быть асимптотической. Рассмотрим для простоты автономную гамильтоновыю систему $H = H(p, q)$.

**Фазовый поток.** Напомним что $2n-$ мерное пространство $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ называется фазовым пространством. Так для $n = 1$ это фазовая плоскость системы $\overset{\circ\circ}{x} = -\partial_x U$. Предположим, что каждое решение уравнений Гамильтона можно продолжить на всю ось времени.(например, для этого достаточно, чтобы множества уровня функции $H$ были компактны).

Определение 0.5: Фазовым потоком называется однопараметрическая группа преобразований фазового потока

$$g^t:\ (p(0), q(0)) \to\ (p(t), q(t))$$

где $(p(t), q(t))$ решение системы уравнение Гамильтона.

**Задача.** Доказать, что $\{g^t\}$-группа($g^{t+s} = g^t \cdot g^s$).

Теорема 0.9 ( Теорема Лиувилля.): Несжимаемый фазовый поток( фазовый поток отвечающий автономной системе $\overset{\circ}{x} = f(x),\ \operatorname{div} f = 0$) сохраняет объем: для любой области $D$ имеем

$$|g^t\ D| = |D|$$

Мы докажем несколько более общее предположение. Пусть дана система обыкновенных дифференциальных уравнений $\overset{\circ}{x}= f(x),\ x = (x_1, \dots, x_n)$, решения которой продолжаются на всю ось времени. Пусть $g^t$ соответствующая группа преобразований

$$g^t(x) = x + f(x)t + O(t^2), \quad t \to 0. \tag{25}$$

Пусть $D(0)-$ область в пространстве $\{x\}$ и $v(0)$ ее объем, $v(t) = |D(t)|,\ D(t) = g^t D(0)$. Тогда если $\operatorname{div} \overline{f} = 0$, то $g^t$ сохраняет объем $v(t) = v(0)$.

Лемма 0.3: Справедливо соотношение

$$\frac{dv}{dt}|_{t=0} = \int_{D(0)} \operatorname{div} f \ dx, \quad dx = dx_1 \dots dX_n$$

**Доказательство.** При любом $t$ по определению якобиана

$$v(t) = \int_{D(0)} \det |\frac{\partial g^t x}{\partial x}| \ dx$$

Вычисляя $\partial g^t x / \partial x$ по формуле (25) при $t \to 0$ находим

$$\frac{\partial g^t x}{\partial x} = E + \frac{\partial f}{\partial x} t + O(t^2)$$

Теперь воспользуемся простой леммой

Лемма 0.4: Для любой матрицы $A = \|a_{ij}\|$ справедливо соотношение

$$\det |E + At| = 1 + t \,\mathbf{tr}\, A + O(t^2), \quad t \to 0.$$

Доказательство получается непосредственным раскрытием определителя. Теперь докажем лемму 1. Отсюда

$$\det \frac{\partial g^t x}{\partial x} = 1 + t \,\mathbf{tr} \frac{\partial f}{\partial x} + O(t^2),$$

где $\mathbf{tr} \frac{\partial f}{\partial x} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_i} = \operatorname{div} f$. Поэтому

$$v(t) = \int_{D(0)} [1 + t \operatorname{div} f + O(t^2)] dx \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} = \int_{D(0)} \operatorname{div} f dx$$

Перейдем к доказательству теоремы. Так как $t = t_0$ не хуже $t = 0$, лемму 1 можно записать в виде

$$\frac{dv}{dt}|_{t=t_0} = \int_{D(t_0)} \operatorname{div} f \ dx$$

и в случае $\operatorname{div} f = 0 \Rightarrow \ dv/dt \equiv 0$. В частности для системы Гамильтона

$$\operatorname{div} f = \partial_p(-\partial_q H) + \partial_q(\partial_p H) \equiv 0.$$

Особенно важные приложения теоремы Лиувилля имеет в статистической механике.

## Приложение к лекция 4. Теорема Пуанкаре о возвращении.

**Теорема Пуанкаре о возвращении.** Теорема Лиувилля позволяет применить к исследованию механических систем методы так называемой эргодической теории( Халмаш П. Лекции по эргодической теории. М. ИЛ, 1959).

Теорема 0.10: Пусть $g-$ сохраняющее объем непрерывное взаимно однозначное отображение, переводящее ограниченную область $D$ евклидова пространства в себя: $gD = D$. Тогда в любой окрестности $U$ любой точки облачти $D$ найдется точка $x \in U$, которая возвращается в оббласть $U$, т.е. $g^n x \in U$ при некотором $n > 0$.

Эта теорема примениема, например, к фазовому потоку двумерной системы с растущим на бесконечности потенциалом $U(x_1, x_2)$. В этом случае
инвариантная ограниченная область в фазовом пространстве определяется условием $D = \{p, q; T + U \leq E\}$. Теорему Пуанкаре можно усилить, доказав, что почти всякая движущаяся точка многократно возвращается к своему исходному положению. Это один из немногих общих выводов о характере движения. Детали движения никому не известны уже в общем случае двумерной потенциалной системы Ньютона.
Несколько парадоксальный вывод из теоремы Пуанкаре и Лиувиля(несжим. фазов. поток) является следующее предсказание: если открыть перегородку, разделяющую камеру с газом и камеру с вакуумом, то через некоторое время молекулы газа почти наверное снова соберутся в первой камере. Разгадка пападокса в том, что "некоторое время"дольше времени существования Солнечной системы. (Ньютонова механика– очень очень малые скорости по сравнением со скоростью света).
**Доказательство теоремы Пуанкаре.** Рассмотрим образы окрестности $U$:

$$U,\ gU,\ g^2U,\ \ldots,\ g^nU, \ldots$$

Все они имеют одинаковые объемы. Если бы они не пересекались, объем $D$ был бы бесконечным. Поэтому при некоторых $k \geq 0,\ l \geq 0,\ k > l$

$$g^kU \bigcap g^lU \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad g^{k-l}U \bigcap U \neq \emptyset.$$

Пусть $g^{k-l}x = y,\ x \in U,\ y \in U$. Тогда $x \in U,\ g^n x \in U(\ n = k - l)$.

**Приложение теоремы Пуанкаре.**

**Пример 1.** Пусть $D-$ окружность, $g-$ поворот на угол $\alpha$. Если $\alpha = 2\pi m/n$, где $m, n$- целые, то $g^n-$ тождественное преобразование и теорема очевидна. Если же $\alpha$ несоизмеримо с $2\pi$, то теорема Пуанкаре дает

$$\forall \delta > 0, \quad \exists n: \ |g^n x - x| < \delta$$

Определение 0.6: Множество $A$ называется всюду плотным в множесве $B$, если в каждой окрестности любой точки $B$ есть точка $A$.

Отсюда легко вытекает

Теорема 0.11: Если $\alpha \neq 2\pi m/n$, $m, n$- целые, то множество точек вида $\{g^k x,\ k \geq 0\}$ всюду плотно на окружности.

**Примеры 2.** Пусть $D-$ двумерный тор, $\varphi_1, \varphi_2$- угловые координаты на торе

$$\overset{\circ}{\varphi}_1 = \alpha_1, \quad \overset{\circ}{\varphi}_2 = \alpha_2, \ \alpha = \text{const}$$

Очевидно, в этом случае $\operatorname{div} f = 0$ и соответствующее движение

$$g^t: \ (\varphi_1, \varphi_2) \to \ (\varphi_1 + \alpha_1 t, \varphi_2 + \alpha_2 t)$$

сохраняет объем $d\varphi_1 d\varphi_2$. Из теоремы Пуанкаре следует

Теорема 0.12: Если $\alpha_1/\alpha_2$ иррационально, то "обмотка"тора $g^t(\varphi_1, \varphi_2)$ всюду плотна на торе.

**Примеры 3.** Пусть $D-$ $n$ мерный тор $T^n$, т.е. прямое произведение $n$ окружностей:

$$D = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1 = T^n$$

(Прямое произведение множеств $A, B, \ldots$ есть множество наборов точек $(a, b, \ldots), \ a \in A, \ b \in B, \ \ldots.)$ Точка $n$ мерного тора задается $n$ угловыми координатами $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$. Пусть $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n), \ g^t-$ преобразование, сохраняющее объем

$$g^t: \ T^n \to \ T^n, \quad \varphi \to \varphi + \alpha t.$$

**Задача.** При каких условиях на $\alpha$ всюду плотны: а) траектории $g^t\varphi$, б) траектория $g^k\varphi(t$ принадлежит группе вещественных чисел $R, \ k$ группа целых чисел $Z$).
Преобразования примеров 1-3 тесно связаны с механикой. Но так как теорема Пуанкаре абстрактная, она имеет и не связанные с механикой приложения.

# ОСНОВЫ КАЧЕСТВЕННОЙ ТЕОРИИ ОДУ.

## Лекция 5. Существование и единственность решения ОДУ

**(Условие Липшица).** Вектор-функция $f(t, x)$ удовлетворяет в области $D$ условию Липшица по $x$ с постоянной $k > 0$, если

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|, \quad \forall (t, x), (t, y) \in D. \tag{26}$$

Лемма 0.5: Если вектор-функция $f(t, x)$ имеет в выпуклой по $x$ области $D \in R^{n+1}$ чстные производные и $|\partial_{x_j} f_i(t, x)| \leq l, \ i, j = 1, \ldots, n$ в $D$ то $f(t, x)$ удовлетворяет в $D$ условию Липшица с постоянной $k = nl$.

**Задача.** Привести пример липшицевой функции, не имеющей производной в точке($|x|$).

**Доказательство леммы.** для любых двух точек $x, y \in D$ пологая $z(s) = y + s(x - y), \ g(s) = f(t, z(s))$ сведем к функции одного переменного $s$ на отрезке $[0, 1]$. Тогда

$$g'(s) = Az'(s) = A(x - y), \quad A = \left(\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}$$

Когда $s$ пробегает отрезок $[0,1]$ $z(s)$ пробегает отрезок, соединяющий точки $x, y$, целиком лежащий в $D$ в силу выпуклости. Значит $|\frac{\partial f_i}{\partial z_j}| \leq l$ и $\|A\| \leq nl,\ |g'(s)| \leq nl|x-y|$, где

$$\|A\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}|^2$$

Лемма 0.6 ((о дифференциальном неравенстве).): Если на отрезке $I$, содержащем точку $t_0$ имеем $z(t) \in R^n$,

$$|z'(t)| \leq k|z(t)| + m, \quad |z(t_0)| \leq r_0,$$

$k \geq 0$, то на $I$ в случае $k = 0$ имеем

$$|z(t)| \leq \ r_0 + m|t - t_0|,$$

а в случае $k > 0$

$$|z(t)| \leq r_0 e^{k|t-t_0|} + \frac{m}{k}(e^{k|t-t_0|} - 1) \tag{27}$$

Действительно, пусть $t_1 \in I,\ t_1 > t_0,\ z(t_1) \neq 0$. Введем $t^* = \inf_{t_2 \in (t_0,t_1)}\ t_2$ таких, что $z(t) \neq 0$ на интервале $(t_2, t_1)$. Очевидно, либо $t^* = t_0$ и тогда $z(t) \neq 0$ на интервале $(t_0, t_1)$, либо $z(t^*) = 0$ и $z(t) \neq 0$ при $t^* < t < t_1$ и существует $|z(t)|' = (\sqrt{z_1^2 + \cdots + z_n^2})'$. В обоих случаях $|z(t^*)| \leq r_0$. Дифференцируя по $t$ обе части равенства $|z|^2 = z \cdot z$ получим $2|z||z|' = 2z \cdot z' \leq 2|z||z'|$. Отсюда $|z|' \leq |z'|$ если $z \neq 0$. Положим $|z(t)| = r(t)$, тогда

$$r(t^*) \leq r_0, \quad r' \leq |z'| \leq kr + m, \quad t^* < t < t_1.$$

В случае $k = 0$ отсюда следует требуемое неравенсво. В случае $k > 0$ для функции $\varphi(t) = e^{-kt}(r(t) + m/k)$ получаем

$$\varphi'(t) = e^{-kt}(r'(t) - kr(t) - m) \leq 0.$$

Поэтому функция $\varphi(t)$ не возрастает и $\varphi(t_1) \leq \varphi(t^*)$, т.е.

$$e^{-kt_1}(r(t_1) + m/k) \leq \ e^{-kt^*}(r(t^*) + m/k)$$

Так как $r(t^*) \leq r_0$, то

$$r(t_1) \leq \ e^{k(t_1 - t^*)} r_0 + \frac{m}{k}(e^{k(t_1 - t^*)} - 1)$$

Число $t_1 \in I$ любое, большее $t_0$, и $t_1 - t^* \leq t_1 - t_0$, поэтому неравенство (27) при любом $t \in I,\ t \geq t_0$ доказано. Случай $t \leq t_0$ сводится к рассмотренному заменой $t$ на $-t$, $t_0$ на $-t_0$. Тогда в формулировке леммы $|z'(t)|$ и $|t - t_0|$ не меняются.

Теорема 0.13 ((о единственности решения)): Пусть в области $D$ вектор-функция $f(t,x)$ и ее производные $\frac{\partial f_i}{\partial z_j}$ непрерывны. Тогда для любой точки $(t_0,x_0)\in D$ может существовать не более одного решения задачи

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x),\quad x(t_0)=x_0. \tag{28}$$

Точнее, любые два решения этой задачи совпадают на общей части интервалов существования.

**Доказательство.** Предположим существование двух решений $x(t),y(t)$ задачи, $x(t_0)=y(t_0),\ x(t_1)\neq y(t_1)$ для некоторого $t_1>t_0$. (Случай $t_1<t_0$ сводится к рассматриваемому заменой $t\to\ -t$). Положим $z(t)=x(t)-y(t),\ z(t_0)=0$, и пусть $t^*$ верхняя грань таких $t\in[t_0,t_1]$ при которых $z(t)=0$. Тогда $z(t^*)=0$ и $z(t)\neq 0$ для $t\in(t^*,t_1]$. Пусть $S\subset D$-шар

$$(t-t^*)^2+|x-x(t^*)|^2\le h^2,\quad h>0$$

Тогда в этом шаре функция $f(t,x)$ удовлетворяет условию Липшица и

$$|z'|=|f(t,x)-f(t,y)|\le k|x-y|=k|z|.$$

Тогда по лемме (0.6) следует $z(t)\equiv 0$ при $t^*\le t\le t_1$(в лемме $m=r_0=0$). Это противоречит предположению $x(t_1)\neq y(t_1)$.

Лемма 0.7: Если $f(t,x)$ непрерывна, то любое решение задачи (28) удовлетворяет интегральному уравнению

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,x(s))\ ds \tag{29}$$

и любое непрерывное решение интегрального уравнения на интервале $I(\ t_0\in I)$ чвляется решением задачи (28)(если $I$ отрезок, то производные в его концах односторонние).

Доказать студентами самостоятельно.

Теорема 0.14 ((локальное существование)): Пусть в области $D\in R^{n+1}$ вектор-функция $f(t,x)$ и ее производные $\partial_{x_j}f_i(t,x),\ i,j=1,\dots,n$ непрерывны. Тогда для любой точки $(t_0,x_0)\in D$ задача (28) имеет единственное решение на отрезке $I[t_0-d\le t\le t_0+d]$, где $d=r/\sqrt{m^2+1},\ r-$ таково что шар $S((t-t_0)^2+|x-x_0|^2\le r^2)$ содержится в $D,\ m=\max_S|f|$.

**Доказательство Тонелли.** Возьмем $r,m,d,S$ как в формулировке теоремы, тогда $|f|\le m$ в $S$ и выполнено неравество Липшица (26). Для любого целого $p\ge 2$ возьмем $h=h_p=d/p$ и построим приближенное решение интегрального уравнения (29). Положим $y_p(t)=x_0$ при $t_0-h_p\le t\le t_0$, а на отрезках $t_0+(i-1)h_p,t_0+ih_p],\ i=1,2,\dots,p$, последовательно определим $y_p(t)$ равенством

$$y_p(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(s,y_p(c-h_p))ds \tag{30}$$

Если $i \geq 1$ и при $t_0 - h_p \leq t \leq t_0 + (i-1)h_p$ функция $y_p(t)$ определена, непрерывна и $|y_p(t) - x_0| \leq md$, то это же верно и при $t_0 \leq t \leq t_0 + ih_p$, так как для таких $t$ точка $(t, y_p(t-h_p)) \in S$ и

$$y_p'(t) = f(t, y_p(t-h_p)), \quad |y_p'(t)| \leq m, \qquad (31)$$
$$|y_p(t) - x_0| \leq m|t - t_0| \leq md.$$

По индукции получаем, что на отрезке $J(t_0 \leq t \leq t_0 + d)$ функции $y_p(t),\ y_p'(t)$ непрерывны и справедливо (31). Оценим разность $z(t) = y_p(t) - y_q(t)$ приближенных решений с $h = h_p$ и с $h = h_q$. В силу (31) и (26)

$$|z'(t)| = |f(t, y_p(t-h_p)) - f(t, y_q(t-h_q))| \leq$$

$$\leq k|y_p(t-h_p)) - y_q(t-h_q)| \equiv$$

$$\equiv k|y_p(t-h_p)) - y_p(t) - (y_q(t-h_q) - y_q(t)) + (y_p(t) = y_q(t))|$$

Так как $|y_p'(t)| \leq m,\ |y_q'(t)| \leq m$, то при $t \in J$

$$|z'(t)| \leq kmh_p + kmh_q + k|z(t)|, \quad z(t_0) = 0.$$

В силу леммы (0.6) получаем при $t \in J$

$$|z(t)| \leq m(h_p + h_q)(e^{k|t-t_0|} - 1) \leq m(h_p + h_q)(e^{kd} - 1) \qquad (32)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $p_1$, что при $p > p_1,\ q > p_1$ правая часть (32) меньше $\varepsilon$. тогда $|y_p(t) - y_q(t)| < \varepsilon$ на $J$, т.е. последовтельность непрерывных функций $\{y_p(t),\ p = 2, 3, \ldots\}$ удовлетворяет критерию Коши равномерной сходимости на $J$. Значит, она сходится равномерно к непрерывной функции, кторую обозначим $x(t)$. Покажем, что $x(t)$ решение интегрального уравнения. При $p > p^*(\delta)$ имеем на $J$

$$|y_p(t-h_p) - y_p(t)| \leq mh_p < \frac{1}{2}\delta, \quad |y_p(t) - x(t)| < \frac{1}{2}\delta, \qquad (33)$$
$$|f(t, y_p(t-h_p)) - f(t, x(t))| \leq k|y_p(t-h_p) - x(t)| < k\delta$$

Правая часть сколь угодно мала при малых $\delta$. Значит, в (30) $f(s, y_p(s-h_p)) \rightrightarrows\ f(s, x(s))$ при $p \to \infty$. В пределе равенство (30) превращается в (29). Итак, $x(t)$ решение интегрального уравнения, значит и задачи (28) при $t_0 \leq t \leq t_0 + d$. Случай $t_0 - d \leq t \leq t_0$ сводится к рассмотренному заменой $t \to\ -t$. Существование решения доказано, а единственность доказана выше.

**Пример 1.** Уравнение $x' = x^2$ имеет решение $x = -1/(t+c)$, число $c$ произвольно. Каждое решение существует только на полуинтервале $t + c > 0$ или полуинтервале $t + c < 0$, при приближении к $-c$ стремиться к $-\infty$, если $t + c > 0$, или к $+\infty$ если $t + c < 0$. Для любой точки $x_0$, проходящее при $t = 0$ через нее решение $x = 1/(t + x_0)$ существует локально.

**Задачи рисунки** см. Филлипов N 720
Существование решения уравнения $y^{(n)} = f(t, y, \ldots, y^{(n-1)})$ высокого порядка сводится к системе первого порядка $u' = g(t, u)$, где $u_1 = y,\ u_2 = y',\ \ldots, u_n = y^{(n-1)}$.

Глобальное решение. Итак, мы доказали существовние решение локально. Стоит вопрос, когда существует глобальное решение, продолженное вплоть до границы $\Gamma$ области $D$ выполнения условий условий теоремы (0.14)?

Теорема 0.15 (Теорема о продолжении решения(глобальное решение)): Пусть вектор-функция $f(t,x)$ и ее производные $\nabla f(t,x)$-непрерывны в замыкании ограниченной облсти $D \in R^{n+1}$. Тогда любое решение $x(t)$ уравнения $x' = f(t,x)$ проходящее внутри области $D$, можно продолжить в себя в обе стороны до выхода на границу $Gamma$ области $D$, т.е. продолжить на такой отрезок $[a,b]$, что точки $(a,x(a))$ и $(b,x(b))$ лежат на $\Gamma$.

По условию теоремы существует $m$ такое, что $|f(t,x)| \leq m$ в $D$. По теореме (0.14) для любой точки $P_0 = (t_0,x_0) \in D$ решение существует на отрезке $I_0 = [t_0 - d_0, t_0 + d_0]$, где $d_0 = r_0/\sqrt{m^2+1}$, $r_0 = \varrho(P_0,\Gamma)-$ расстояние от точки $P_0$ до границы $\Gamma = \partial D$ области $D$. Положим $t_1 = t_0 + d_0,\ x_1 = x(t_1),\ P_1 = (t_1,x_1)$. Если $P_1$ внутри $D$, то беря ее за начальную точку, по теореме (0.14) получим, что решение $\widetilde{x}$, проходящее через $P_1$ существует на отрзке $I_1 = [t_1 - d_1, t_1 + d_1]$, где $d_1 = r_1/\sqrt{m^2+1}$, $r_1 = \varrho(P_1,\Gamma)$. Так как $x(t_1) = x_1 = \widetilde{x}(t_1)$ то в силу теоремы единоственености они совпадают так где обо определены, т.е функция, равная $x(t)$ на $I_0$ и $\widetilde{x}(t)$ на $I_1$ является решением, продолжающим $x(t)$ на отрезок $t_0 - d_0, t_1 + d_1]$. Его также будем обозначать через $x(t)$. Затем берем точку $p_2 = (t_2,x_2),\ t_2 = t_1 + d_1,\ x_2 = x(t_2)$ за начальную точку и продолжаем решение далее и т.д. Возможны два случае: либо после конечного числа таких шагов будет продолжение до точки на границе $\Gamma$, либо получим последовательность точек $P_k = (t_k,x_k),\ k = 1,2,\ldots,$ где

$$t_{k+1} = t_k + d_k, \quad d_k = r_k/\sqrt{m^2+1}, \quad r_k = \varrho(P_k,\Gamma) \tag{34}$$

Область $D$ ограничена, поэтому числа $t_k$ ограничены и существует предел $b = \lim_k t_k$. Решение продолжено на объединение $[t_0,b)$ отрезков $t_k, t_{k+1}]$. Так как $|x'| = |f(t,x(t))| \leq m$, то для любых $\alpha,\beta \in (b-\delta,b)$ имеем $x(\beta) - x(\alpha)| \leq m|\beta - \alpha| < m\delta$. Поэтому в силу критерия сходимости Коши существует предел $X^* = \lim_{t\to b-0} x(t)$. Положим $x(b) = x^*$, тогда функция $x(t)$ непрерывна на $[t_0,b]$ и точки $P_k \to P^* = (b,x(b))$ при $k \to \infty$.

Покажем, что $P^* \in \Gamma$. Так как $t_{k+1} = t_1 + d_1 + d_2 + \ldots,\ t_k \to b,\ k \to \infty$, то $d_k = \varrho(P_k,\Gamma) \to 0$, т.е.$P^* \in \Gamma$. Таким образом, решение $x(t)$ продолжено вправо до границы $\Gamma$ области $D$. Как решение задачи (28) при $t_1 \leq t < b$ функция $x(t)$-решение интегрального уравнения при этих $t$, а так как это решение непрерывно, то оно удовлетворяет интегральному уравнению на отрезке $[t_0,b]$. Тогда $x(t)$ имеет левую производную $x'(b) = f(b,x(b))$, т.е. удовлетворяет уравнению (28) при $t_0 \leq t \leq b$. При $t < t_0$ решение продолжается аналогично.

## Лекция 6. Существование глобального решения.

На прошлой лекции мы доказали

Теорема 0.16 (Теорема о продолжении решения(глобальное решение)): Пусть вектор-функция $f(t,x)$ и ее производные $\nabla f(t,x)$-непрерывны в замыкании ограниченной облсти $D \in R^{n+1}$. Тогда любое решение $x(t)$ системы $x' = f(t,x)$ проходящее внутри области

$D$, можно продолжить в себя в обе стороны до выхода на границу $\Gamma$ области $D$, т.е. продолжить на такой отрезок $[a, b]$, что точки $(a, x(a))$ и $(b, x(b))$ лежат на $\Gamma$.

Как следствие получаем:

Следствие 0.1: Пусть вектор-функция $f(t, x)$ и ее производные $\nabla f(t, x)$-непрерывны в замыкании области $D \in R^{n+1}$, ограниченной по пространственным переменым, т.е. для любого $t \in I$, где интервал $I$ может быть и бесконечным, $|x| \leq c(t),\ \forall (x, t) \in D$. Пусть область $D_{t_1,t_2} \subset D$ есть сечение $D$, находящееся между плоскостями $t = t_1$. $t = t_2$. Тогда любая траектория $x(t)$ системы $x' = f(t, x)$ либо выходит на боковую поверхность области $D_{t_1,t_2}$ либо выходит на верхнюю $\Gamma_{t_1} = \{(x, t_1) \in \overline{D_{t_1,t_2}}\}$ или нижнюю $\Gamma_{t_2} = \{(x, t_2) \in \overline{D_{t_1,t_2}}\}$ крышки.

Следствие 0.2: Пусть $D$ замыкнутая неограниченная область пространства $t, x$, такая что при любых $c$ и $d$ часть $D_{cd}$ области $D$, где $c \leq t \leq d$ ограничена. Пусть уравнение $x' = f(, x)$ в $D$ удовлетворяет условиям предыдущей теремы. Тогда решение $x(t)$, проходящее через произвольную точку $(t_1, x_1)$ внутри $D$ продолжается в каждую сторону или до выхода НА ГРАНИЦУ ОБЛАСТИ $D$ или до сколь угодно больших $|t|$.

**Доказательство.** Возьмем такие $c$, сечения $D_{cd_i}$ и $d_i,\ i = 1, 2, \ldots$, что $c < t_1 < d_1 < d_2 < \ldots \ \to \infty$. Для любого $i$ по теореме (0.16) решение можно продолжить в обе стороны до точек $(a, x(a))$ и $(b_i, x(b_i))$, лежащих на границе области $D_{cd}$. Если $b_i < d_i$ при некотором $i$, то точка $(b_i, x(b_i))$ лежит на границе области $D$. Если же для каждого $i$ имеем $b_i = d_i$, то решение продолжается вправо до сколь угодно больших $t$. Аналогично продолжается решение влево.

**Пример 1.** Доказать, что любое решение уравнения $x' = t^3 - x^3$ продолжается вправо до сколь угодно больших $t$. Действительно, это уравнение удовлетворяет условиям телоемы (0.14), так как функции $f = t^3 - x^3,\ f' = -3x^2$ непрерывны при всех $t, x$. В области $x > t$ решение только убывает, по этому оно достигает прямой $x = t$ и переходит в область $x < t$ где оно возрастает. Пусть $(t_1, x_1)$ точка на графике решения. При $t > t_1$ решение остается в области $D = (x_1 - 1 < x < t)$, не выходя на ее границу(мешает поле направлений $t^3 - (x - 1)^3 = (t^3 - x^3) + 2(x - 1) + 1 > 0$ в $D$). В силу следствия теоремы (0.16) решение продолжается влево до сколь угодно больших $t$.

Условие непрерывности $f(t, x)$ и ее производных во всем пространстве $t, x$ недостаточно для продолжения решения уравнения $x' = f(t, x)$ на бесконечный интервал $-\infty < t < \infty$ (или $t_0 < t < \infty$).
**Пример 2.** Уравнение $x' = x^2$ имеет положение равновесия $x \equiv 0$ и решение $x = -1/(t+c)$, число $c$ произвольно. Каждое решение существует только на полуинтервале $t + c > 0$ или полуинтервале $t + c < 0$, при приближении к $-c$ стремиться к $-\infty$, если $t + c > 0$, или к $+\infty$ если $t + c < 0$. Это не противоречит результатам следствия теоремы о продолжении решения, приводимой ниже, и находится в рамках сформулированных в ней результатов. Если рассмотреть область $D = \{-1 < t < 1,\ x \in (-1, 1)\}$ то для любых $-1 < c < 1$ соответствующие траектории одним концом

выходят на боковую поверхность $|x| = 1$, дугим когцом выходят на верхнюю $t = 1$ или нижнюю крышки.

Теорема 0.17 ((о продолжении решения на весь заданный интервал).): Пусть вектор-функция $f(t,x)$ удовлетворяет условиям следствия (0.2) в области $D_{\alpha,\beta} = \{\alpha < t < \beta,\ x \in R^n\}$(допускается случай $\alpha = -\infty$ и $\beta = \infty$) и дополнительно пусть

$$|f(t,x)| \leq \ a(t)|x| + b(t), \tag{35}$$

функции $a(t),\ b(t)$ непрерывны. Тогда каждое решение уравнения $x' = f(t,x)$ проходящее в этой области можно продолжить на весь интервал $(\alpha,\beta)$.

Покажем, что для любого отрезка $[\alpha_1,\beta_1] \subset (\alpha,\beta)$ любое решение $x(t)$, заданное при $t = t_0 \in (\alpha_1,\beta_1)$ можно продолжить на весь отрезок $[\alpha_1,\beta_1]$. На этом отрезке имеем $|a(t)| \leq k,\ |b(t)| \leq m$, поэтому $|x'| \leq |f(t,x)| \leq k|x| + m$. Возьмем $d = |x(t_0)|$ и $R$, равное максимуму правой части в (27) на отрезке $[\alpha_1,\beta_1]$. По теореме (0.16) решение можно продолжить в обе стороны до выхода на границу цилиндра $Z = \{\alpha_1 \leq t \leq \beta_1,\ |x| \leq R+1\}$ По лемме 1 лекции 5 из неравенства $|x'| \leq k|x|+m$ следует $|x(t)| \leq R$ на той части отрезка $[\alpha_1,\beta_1]$, где существует решение. Поэтому решение $x(t)$ не может выйти на боковую поверхность $|x| = R + 1$ цилиндра $Z$. Тогда оно продолжается до выхода на оба основания цилиндра, т.е. на весь отрезок $[\alpha_1,\beta_1]$.
Возьмем последовательности $\alpha_1 > \alpha_2 > \dots \to \alpha$ и $\beta_1 < \beta_2 < \dots \to \beta$. Из доказанного следует, что решение $x(t)$ можно продолжить на отрезок $[\alpha_1,\beta_1]$, затем на $[\alpha_2,\beta_2]$ и т.д. Тогда решение будет продолжено на объединение этих отрезков, т.е. на весь интервал $(\alpha,\beta)$.
**Задача.** Пусть в теореме (0.17) вместо (122) для $t \geq t_0$ выполнено $x\dot{f}(t,x) \leq a(t)|x|^2 + b(t)$, $a(t),\ b(t)$ непрерывны, тогда, как в теореме (0.17) доказывается продолжимость любого решения $x(t)$ на интервал $[t_0,\infty)$.
Действительно, для любого решения $x(t)$ для $t \geq t_0$

$$\frac{d}{dx}|x(t)|^2 = 2x \cdot x' = 2x \cdot f(t,x) \leq \ 2a(t)|x|^2 + 2b(t)$$

На любом отрезке $[t_0,t_1]$ для функции $r(t) = |x(t)|^2$ имеем $r' \leq kr + m$ при некоторых $k, m$. Тогда, как в теореме (0.17) доказывается продолжимость решения $x(t)$ на интервал $[t_0,\infty)$.

## Непрерывная зависимость решения от параметра

Во многих задачах мы должны рассмотреть возмущение начальных данных или возмущение поля скоростей $f$. Рассмотрим задачу с параметром $\mu \in M$ ($M-$ ограниченная область в $R^m$)

$$x' = f(t,x,\mu), \quad x(t_0) = x_0(\mu). \tag{36}$$

Если вектор-функция $f$ и ее производные непрерывны по $t, x$ непрервыно по $(t,x,\mu)$, то в ограниченной области $D \in R^{n+1}$ переменных $x, t$ постоянные $m$ и $l$ локальной теремы существования решения лекции 5 можно выбрать равномерно по $\mu \in M$, т.е.

не зависящими от $\mu$. Тогда по тереме о продолжении решения при каждом $\mu \in M$ существует решение $x = \varphi(t,\mu)$, продолженное вплоть до границы $\Gamma$ области $D$(т.е. считаем, что оно продолжено, насколько это возможно). Ниже мы сформулируем условия, при которых решение непрерывно по $\mu$ и более того- дифференцируемо.

Теорема 0.18 (о непрерывной зависимости решения от параметра): Пусть при $\mu = \mu_0$ решение задачи (36) существует на отрезке $I(\mu_0) = [t_1(\mu_0), t_2(\mu_0)]$. Рассмотрим трубчатую область $\Omega_\varrho$ и в окрестности его графика $\Omega_\varepsilon = \{t \in I(\mu_0),\ |x - \varphi(t,\mu_0)| \le \varrho\} \cap D$. Вектор-функция $f(t,x,\mu)$ и ее производные непрерывны по $x$; $x_0(\mu)$ непрерывна по $x, t, \mu$. Тогда для любого $0 < \varepsilon < \varrho$ существует $\eta(\varepsilon) > 0$, такое что решение $x(t,\mu)$ системы (36) принадлежит $\Omega_\varepsilon$ для $|\mu - \mu_0| < \eta$.

Как следствие получаем

Следствие 0.3: Если $f(t,x)$ и ее производные $\nabla f(t,x)$ непрерывны в трубчатой окрестности $\Omega_\varrho$ графика решения $x = \varphi(t)$ и $\chi_i(t)$– решения той же системы $x' = f(t,x),\ x(t_0) = x_0$ с начальными условиями $\chi_i(t_0) = a_i \to \varphi(t_0)$, то равномерно $\chi_i(t) \to \varphi(t)$, т.е. для любой трубки $\Omega_\varepsilon$ для достаточно больших $i \ge i_0$ решение $\chi_i(t)$ лужит в $\Omega_\varepsilon$.

**Доказательство теоремы.** Пусть $I(\mu_0) = (t_1(\mu_0), t_2(\mu_0)$ интерва жизни траектории $x = x(t,\mu_0)$( точки $(x(t_j(\mu_0),\mu_0), j = 1,2$, лежат на границе области $D$. Возьмем $T_1 < t_1(\mu_0),\ T_2 > t_2(\mu_0)$. Выберем $T_1, T_2$ так, чтобы в области $D_{T_1,T_2} = D \cap \{T_1 < t < T_2\}$ были выполнены расномерно по $\mu \in M$ условия теоремы (0.16). Рассмотрим трубчатую окрестность $\Omega_\varepsilon$ решения $x = x(t,\mu_0)$, выбрав $\varepsilon$ настолько малым, что $\Omega_\varepsilon \subset D_{T_1,T_2}$. Тогда существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое что точки $(x_0(\mu), t_0) \in \Omega_\varepsilon$ для любого $|\mu - \mu_0| < \delta$. По тереме опродолжении решения траектории $x(t,\mu),\ x(t_0,\mu) = x_0(\mu)$ системы (36) либо выходят на боковую поверхность области $D_{T_1,T_2}$, либо на одну из верхних крышек $D \cap \{t = T_j\}$. Покажем, что для достаточно малого $\delta$ все тректории с $x(t_0) = x_0(\mu),\ |\mu - \mu_0| < \delta$ выходят на боковую поверхность области $D_{T_1,T_2}$. Сравним траектории $x(t,\mu),\ x(t,\mu_0)$ внутри $\Omega_\varepsilon$. Имеем

$$
\begin{gathered}
|x(t,\mu) - x(t,\mu_0)| \le |x_0(\mu) - x(\mu_0)| + \le \\
+\left| \int_{t_0}^{t} |f(s,x(s,\mu),\mu) - f(s,x(s,\mu_0),\mu_0)| ds \right| \\
\le\ |x_0(\mu) - x(\mu_0)| + c(|\mu - \mu_0|)(T_2 - T_1) + l|t - t_0|\ |x(s,\mu) - x(s,\mu_0)|
\end{gathered} \tag{37}
$$

где

$$
\begin{gathered}
|f(s,x(s,\mu),\mu) - f(s,x(s,\mu_0),\mu_0)| \le\ |f(s,x(s,\mu_0),\mu) - f(s,x(s,\mu_0),\mu_0)| + \\
+ |f(s,x(s,\mu),\mu_0) - f(s,x(s,\mu_0),\mu_0)|, \\
|f(s,x(s,\mu_0),\mu) - f(s,x(s,\mu_0),\mu_0)| \le \max_{(t,x),(t,y) \in D_{T_1,T_2}} |f(t,x,\mu) - f(t,x,\mu_0)| = \\
= c(|\mu - \mu_0|) \to 0, \quad \mu \to \mu_0, \\
|f(s,x(s,\mu),\mu_0) - f(s,x(s,\mu_0),\mu_0)| \le\ l|x(s,\mu) - x(s,\mu_0)|.
\end{gathered}
$$

Длина интервала $(t_1(\mu) < t < t_2(\mu)$ нахождения решения $x(t,\mu)$ в области $\Omega_\varepsilon$ не превосходит $T_2 - T_1$. Поэтому существует разбиение $(t_1(\mu) < t < t_2(\mu)$ на интервалы

$t_N^- < \cdots < t_1^- < \ t_0 < \ t_1^+ < \cdots < t_N^+$ длины $|t_{j+1}^\pm - t_j^\pm| = d = 1/2l$. Число таких интервалов не превосходит $N_0 = [(T_2 - T_1)2l] + 1$, где $[m]$– целая часть числа $m$. На первом интервале $(t_1^- < t_0 < t_1^+)$ из (37) получим

$$|x(t,\mu) - x(t,\mu_0)| \leq \ 2|x_0(\mu) - x(\mu_0)| + 2c(|\mu - \mu_0|)(T_2 - T_1), \tag{38}$$

для $\forall t \in (t_1^- < t_0 < t_1^+)$. Тогда через $N \leq N_0$ шагов получим

$$|x(t,\mu) - x(t,\mu_0)| \leq \ 2^{N_0}(|x_0(\mu) - x(\mu_0)| + c(|\mu - \mu_0|)(T_2 - T_1)) \tag{39}$$

на всем времени пребывания траектории $x(t,\mu)$ в трубчатой области $\Omega_\varepsilon$. Таким образом, выбирая $\delta(\varepsilon)$ настолько малым, что

$$2^{N_0}(|x_0(\mu) - x(\mu_0)| + 2c(|\mu - \mu_0|)(T_2 - T_1)) < \ \frac{1}{2}\varepsilon$$

мы получаем, что траектория $x(t,\mu)$ не может выйти на границу трубки $\Gamma_1 = \{|x - x(t,\mu_0)| = \varepsilon, \ t \in (t_1(\mu_0), t_2(\mu_0))\} \cap D$, т.е. траектьрия $x(t,\mu)$ выходит из $\Omega_\varepsilon$ только на боковой поверхности области $D_{T_1,T_2}$ для любого $+\mu - \mu_0| < \delta$. Доказательство

дифференцируемости $x(t,\mu)$ по $\mu$ следует из интегрального представления решения

$$x(t,\mu) = x_0(\mu) + \int_0^t \ f(s, x(s,\mu), \mu) ds$$

Дифференцируя по $\mu$ получим что производная $\partial_\mu x(t,\mu)$ есть решение уравнения в вариациях

$$\partial_\mu x(t,\mu) = \partial_\mu x_0(\mu) + \int_0^t \ [\partial_\mu f(s, x(s,\mu), \mu) + \partial_x f(s, x(s,\mu), \mu)\partial_\mu x(s,\mu)] ds$$

Обоснование этого утверждения мы получим позднее.

Можно существенно ослабить условия теоремы (0.18), разрешив осцилляции в правой части. Заменим условие непрерывности $f$ от $\mu$ на условием

$$\int_{t_0}^t \ f(s,x,\mu) ds \rightrightarrows \ \int_{t_0}^t \ f(s,x,\mu_0) ds \quad \mu \to \mu_0, \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

$\mu_0$ фиксировано; $f, \ \partial_x f$ ограничены в $V$, $f$ непрерывно по $t, x$. Тогда $\varphi(t\mu) \rightrightarrows \ \varphi(t,\mu_0)$ при $\mu \to \mu_0$.

**Пример.** Рассмотрим задачу $x' = f(t,x,\mu), \ x(0,\mu) = a, \ 0 < a < 2$ где $D = \{0 \leq t \leq 1, \ |x - a| < 2\}$,

$$f(t,x,\mu) = x^2 + 4(1-x)\sin^2\frac{t}{\mu} \ (\mu \neq 0) = x^2 + 2(1-x) + 2(1-x)\cos\frac{2t}{\mu},$$

$$f(t,x,0) = x^2 - 2(x-1)$$

Слабое условие непрерывности выполнено

$$\int_0^t (2\sin^2\frac{s}{\mu}-1)ds \ \Rightarrow \ 0, \quad t\to\infty.$$

Поэтому решение данной задачи $x=\varphi(t,\mu)$ при $\mu\to 0$ равномерно по $t\in[0,1]$ стремиться к решению задачи

$$x'=x^2-2(x-1)=(x-1)^2+1, \quad x(0)=a$$

Замена $y=x-1$ приводит к задаче $y'=y^2+1, \quad y(0)=a-1$, т.е. $y=\text{th}(t+c)$, где $\text{th}(c)=a-1 \ \ \Rightarrow \ c=\mathbf{arc}th(a-1), \ -1<a-1<1$. Отсюда $x=1+\text{th}(t+c(a))$.

## Лекция 7. Устойчивость.

**Понятие устойчивости.** математическая теория устойчивости изучает поведение решений системы ОДУ при $t\to\infty$. Основной вопрос: в каких случаях можно утверждать, что решение мало меняется на всем бесконечном интервале $t_0\le t<\infty$ при любых достаточно малых изменениях( возмущениях) начальных данных и функций, входящих в уравнения рассматриваемой системы. Теория устойчивости имеет большое значение в технике, так как в реальных задачах исходные данные, а часто и уравнения движения( например, из-за неучитываемых помех) известны лишь приближенно. Для создания машины, способной выполнять определенную работу, не всегда достаточно качественных физических соображений, во многих случаях нужен математический аппарат.

**Основные определения.** Рассматривается общая система

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x), \quad x\in R^n \tag{40}$$

и ее частное решение $x=\varphi(t), \ t_0\le t<\infty$. Вектор-функция $f(t,x)$ и ее производные $\nabla f(t,x)$ определены и непрерывны в окрестности решения $|x-\varphi(t)|<\varrho, \ t_0\le t<\infty$. Решение $x=\varphi(t)$ с начальными данными $x(t_0)=x_0$ называется устойчивым(или устойчмвым по Ляпунову), если для любого $\varepsilon>0$ существует $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, такое что для каждого возмущения $\widetilde{x_0}, \ |x_0-\widetilde{x_0}|<\delta$ решение $\widetilde{x}(t)$ с начальным условием $\widetilde{x}(t_0)=\widetilde{x}_0$ при $t_0\le t<\infty$ существует и

$$|\widetilde{x}(t)-\varphi(t)|< \ \varepsilon, \ t_0\le t<\infty.$$

Это значит, что каждое решение с начальными данными из $\delta-$ окрестности точки $x_0$ при $t_0\le t<\infty$ существует и не выходит из $\varepsilon-$ трубки, ось которой–решение $x=\varphi(t)$.

Решение $x=\varphi(t)$ называется асимптотически устойчивым, если

1) оно устойчиво по Ляпунову,

2) все решения $\widetilde{x}(t)$ с начальными условиями $\widetilde{x}(t_0)$ из некоторой окрестности $\delta_0-$ точки $x_0$ неограниченно сближается с решением $x=\varphi(t)$ при $t\to+\infty$, т.е.

$$\widetilde{x}(t)-\varphi(t)\to 0 \quad t\to+\infty.$$

Требования 1) и 2) **НЕЗАВИСИМЫ.** Из 1) не следует 2) и из 2) не следует 2), когда где то на конечном времени есть всплеск( рис.).
**Задача.** Если усточиво при начальном моменте $t_0$ то устойчиво при любом начальном моменте $t_1 > t_0$.
Исследование устойчивости любого решения $x = \varphi(t)$ системы можно привести к исследованию устойчивости нелувого решения другой системы, если сделать замену $x = \varphi(t) + y$. Так как $x = \varphi(t)$- решение, то $\varphi'(t) = f(t, \varphi(t))$ и

$$y' = f(t, \varphi(t) + y) - f(t, \varphi(t)) = g(t, y)$$

**Пример 1.** Устойчиво ли нелевое решение система

$$y' = -y^2$$

Общее решение $y = 1/(t + c),\ c = \text{const},\ y = 0$-особое решение( рис.). Из того что $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ ошибочно было бы делать вывод об устойчивости нулевого решения. Для устойчивости нулевого решения надо, чтобы из $|y(0)| < \delta$ следовало бы

$$|y(t)| < \varepsilon \tag{41}$$

при $0 \le t < \infty$. В области $y > 0$ решения убывают и стремятся к нулю. При $y(0) < 0$ решения убывают и имеют вертикальные асимптоты, т.е. не удовлетворяют условию (41). Поэтому нулевое решение неустойчиво.
**Пример 2.** Устойчиво ли нулевое решение системы

$$\frac{dx}{dt} = -4y, \quad \frac{dy}{dt} = x$$

Первый интенрал $Q = x^2 + 4y^2 = c > 0(\frac{d}{dt}Q = -8xy + 8xy = 0)$ определяет общее решение. Эти линии–эллипсы. Если $x^2(0) + y^2(0) < \delta^2$, то при $t > 0$ решение $x(t), y(t)$ остается внутри эллипса $x^2 + 4y^2 = 4\delta^2$, описанного около круга $x^2 + y^2 < \delta^2$(рис.) Так как кривые, изображающие решения, не пересекаются, то решение $x(t), y(t)$ остается внутри этого эллипса, значит и внутри круга $x^2 + y^2 = \varepsilon^2,\ \varepsilon = 2\delta$, описанного около эллипса. Нулевое решение устойчиво. Асимптотической устойчивости нет, так как каждое решение остается на эллипсе $x^2 + 4y^2 = c$ и не стремится к нулю при $t \to +\infty$.

**Условия устойчивости для линейной системы с постоянными коэффициентами.** Пусть в системе $dx/dt = Ax$ матрица $A$ имеет собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.

Теорема 0.19: 1) Если все $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, то нулевое решение асимптотически устойчиво,

2) Если все $\operatorname{Re}\lambda_j \le 0$, и для тех $\lambda_j$, у которых $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$, все жордановы клетки размера 1, то нулевое решение устойчиво,

3) Если имеются $\lambda_j$, у которых $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, или у которого $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$ и жорданова клетка размера $\ge 2$, то нулевое решение неустойчиво.

**Доказательство.** Любое решение имеет вид

$$x = \mathcal{P}_1(t)e^{\lambda_1 t} + \cdots + \mathcal{P}_m(t)e^{\lambda_m t}$$

где $\mathcal{P}_j(t)$ полиномы степени не выше $k_j - 1$, $k_j$-размер наибольшей из жордановых клеток, содержащих $\lambda_j$, коэффициенты полиномов–векторы из $R^n$. При $\lambda = \alpha + i\beta$

$$\mathcal{P}(t)e^{\lambda t} = \mathcal{P}(t)e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t), \quad |\cos\beta t + i\sin\beta t| \equiv 1.$$

Если $\alpha < 0$, то $e^{\alpha t} \to 0,\ t \to_\infty$, и очевидно $\mathcal{P}(t)e^{\lambda t} \to 0$. Поэтому в случае 1) каждое решение стремится к нулю при $t \to +\infty$, значит ограничено при $0 \le t \le \infty$. Тогда и фундаментальная матрица $X(t)$ ($X' = AX$), столбцы которой–решения, и $X(0) = E$, тоже ограничена, $\|X(t)\| \le m$ ($0 \le t < \infty$), и $\|X(t)\| \to 0$ при $t \to +\infty$. Для любого решения $x(t) = X(t)x_0$. Поэтому из $|x(0)| < \delta = \varepsilon/m$ следует $|x(t)| \le \|X(t)\|\ |x(0)| < \varepsilon,\ 0 \le t < \infty$. Кроме того $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Нулевое решение асимптотически устойчиво.

В случае 2) те слагаемые, в которых $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ ограничены при $0 \le t < \infty$ как и в случае 1). Слагаемые с $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$ имеют многочлены нулевой степени, т.е. постоянные и тоже ограничены. Опять все решения ограничены и в силу тех же оценок, что и выше, нулевое решение устойчиво.

В случае 3) при наличии хотя бы одного $\lambda = \alpha + i\beta$ с $\alpha > 0$ имеется частное решение $x(t) = e^{(\alpha+i\beta)t}v$, где $v$-собственный вектор для этого $\lambda$. Это решение неограниченно растет. Пусть $\delta > 0$ любое и $c = \delta/(2|x(0)|)$. Тогда решение $x_1(t) = cx(t)$ имеет $|x_1(0)| = \delta/2$, но $x_1(t)$ неограниченно растет при $t \to +\infty$. Нулевое решение неустойчиво.

Если же нет $\lambda_j$ с $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$, но есть $\lambda$ с $\operatorname{Re}\lambda = 0$ и жордановой клеткой размера $k \ge 2$, то из формул, дающих решение системы с жордановой клеткой следует существование решения $y = \mathcal{P}(t)e^{\lambda t}$, где $\mathcal{P}(t)$ многочлен степени $k-1 \ge 1$ со старшим коэффициентом, не равным нулю. Так как здесь $|e^{\lambda t}| = 1$, то это решение неограничено и нулевое решение неустойчиво.

**Задачи**

1. Доказать необходимость условий теоремы (0.19).

2. При каких $a \in R$ существуют ограниченные при $-\infty < t < \infty$ решения системы

$$x' = 2y - 4x + 1, \quad y' = 2x - y + a$$

Найти все такие решения. Устойчивы ли они?

3. Устойчиво ли решение системы

$$x' = x - y, \quad y' = 2x - y + 6\sin^2 t,$$

имеющее период $\pi$?

4. Задачи 158-160, стр 172(Задачник Филлипова по ОДУ).

В этой лекции мы проведем исследование устойчивости с помощью функции Ляпунова. Производной функции $v(t,x)$ в силу данной системы

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \quad x \in R^n,\ f \in R^n, \tag{42}$$

называется функция

$$\frac{dv}{dt}|_{(42)} = \partial_t v + \nabla_x v \cdot f.$$

Теорема 0.20 (Теорема Ляпунова об устойчивости): Пусть $x(t) \equiv 0$ решение системы (42) и пусть при $|x| \leq \varrho,\ \varrho > 0$, существует функция $v(x) \in C^1$(ловушка) такая, что $v(0) = 0,\ V(x) > 0\ \ \forall x \neq 0$ и

$$\frac{dv}{dt}|_{(42)} \leq\ 0. \tag{43}$$

Тогда нулевое решение $x(t) \equiv 0$ устойчиво.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$ и $\varepsilon_1 = \min(\varepsilon, \varrho)$. Непрерывная функция $v(x)$ на множестве $S = \{|x| = \varepsilon_1\}$ достигает в некоторой точке $x^* \in S$ своего наименьшего значения $m = v(x^*) = \min_S v > 0$ так как $v(x) > 0$ на $S$. Далее, $v(0) = 0$ и непрерывна, поэтому существует $\delta(\varepsilon)$ что $v(x) < m/2$ при $|x| < \delta$. Теперь рассмотрим область $D_1 = \{(t, x),\ |x| = \delta,\ t_0 < t < t_0 + 1\}$. Предположим, что решение $x(t)$ стартуя с $|x(t_0)| < \delta$. Тогда в силу следствия теоремы о продолжении найдется $t_1 > t_0$ что либо траектория выходит на боковую поверхность области $D$ где $|x(t_1)| = \delta$, либо траектория выходит на верхнюю крышу и тогда $|x(t)| < \delta$ при $t_0 \leq t <\ t_1$. Но первый случай не возможен, так как тогда $v(x(t_0)) < m/2,\ \ v(x(t_1)) = m/2$ в силу выбора $\delta,\ m$. Но это не возможно, так как

$$\frac{dv(x(t))}{dt} = \frac{dv}{dt}|_{(42)} \leq\ 0,$$

т.е. $v(x(t))$ не возрастает. Отсюда $v(t_1) < m/2$. Теперь можно стартовать с точки $x = x(t_1)$ и рассмотреть область $D_1 = \{(t, x),\ |x| = \delta,\ t_1 < t < t_1 + 1\}$. Опять получим существование $t_2 > t_1$ так что $|x(t)| < \delta$ при $t_1 \leq t <\ t_2$ и. т.д.

Теорема 0.21 (Теорема Ляпунова об асимп. уст.): Пусть выполнены условия теоремы (0.20) с заменой неравенства (44) на

$$\frac{dv}{dt}|_{(42)} \leq\ -w(x) < 0,\ \ 0 < |x| < \varrho. \tag{44}$$

Функция $w(x)$ непрерывна при $|x| \leq \varrho$. Тогда нулевое решение апсмптотически устойчиво.

Из предыдущей теоремы следует устойчивость нелевого решения, т.е. любое решение $x(t)$ с $|x(t_0)| < \delta$ остается в шаре $|x| < \varepsilon_1$ при $t_0 \leq t < \infty$. Покажем что $x(t) \to 0\ \ t \to \infty$. В противном случае нашлись бы такие $\eta > 0$ и $t_1, t_2, \ldots\ \to \infty$ что $|x(t_i)| \geq \eta,\ i = 1, 2, \ldots$. В замкнутой области $\eta \leq |x| \leq \varepsilon_1$ имеем $v(x) \geq \mu > 0$, отсюда

$$\frac{dv}{dt}|_{(42)} \leq\ -\frac{w(x(t))}{v(x(t))}\ v(x(t)) <\ -c_0\ v(x(t)),\ c_0 > 0.$$

Следовательно $d(e^{c_0 t} v(x(t)))/dt \leq 0$ и

$$v(x(t_j)) \leq\ e^{-c_0(t_j - t_1)}\ v(x(t_1)),\ \ \forall j > 1.$$

что противоречит условию $v(x) \geq 0$.

**Пример 1.** Устойчиво ли нулевое решение уравнения $x' = \sin x - x$?

Положим $v(x) = |x|^2$. Тогда

$$\frac{dv}{dt} = 2xx' = 2x(\sin x - x) < 0, \quad x \neq 0.$$

Функция $x(\sin x - x)$ четная, достаточно доказать $x(\sin x - x)$ при $x > 0$, т.е. $\sin x - x \leq 0$. Но $(\sin x - x)' = \cos x - 1 \leq 0, \ (\sin x - x)|_{x=0} = 0$, т.е. $\sin x - x \leq 0$. Отсюда следует асимптотическая устойчивость.

**Пример 2.** Устойчиво ли нулевое решение системы

$$x' = y - x, \quad y' = -x^3$$

Линейная часть системы имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, собственные значения которой $\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = -1$, собственные вектора $v_1 = (1,1)^\top, \ v_2 = (1,0)^\top$ лежат на прямых $y - x = 0$ и $y = 0$. Возьмем $v = (y-x)^2 + y^2$. тогда

$$\frac{dv(x(t),y(t))}{dt} = 2(y-x)(y'-x') + 2yy' = 2(y-x)(x-y-x^3) - 2yx^3 =$$

$$= -2(x-y-x^3)^2 - 2x^4(1-x^2) < 0$$

если $|x| < 1$, кроме точки $x = 0$. Отсюда следует асимптотическая устойчивость.

## Лекция 8. Устойчивость по первому приближению.

На прошлой лекции в терминах функции Ляпунова мы получили услоия устойчивости положения равновесия. Теперь рассмотрим теорему **(Теорема Четаева о неустойчивости**

Теорема 0.22: Пусть $x(t) \equiv 0$-решение системы

$$x' = f(t,x) \tag{45}$$

Пусть область $D$ пространства $x$ лежит в шаре $S = \{|x| \leq \varepsilon\}$, а ее граница $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \ 0 \in \Gamma_0, \ |x| < \varepsilon$ на $\Gamma_0$, $|x| = \varepsilon$ на $\Gamma_1$, множество $\Gamma_1$ может быть пустым. Пусть в $D \cup \Gamma$ существует непрерывная функция $v(x), \ v(x) = 0$ на $\Gamma_0$, в в $D$ имеем $v \in C^1, \ v(x) > 0, \ dv/dt|(45) \geq w(x) > 0, \ w$ непрерывна в $D \subset \Gamma$. Тогда нулевое решение системы (45) неустойчиво.

Предположим, что нулевое решение устойчиво. Тогда найдется такое $\delta > 0$, что любое решение $x(t)$ с начальным условием $x(t_0) \in D, \ |x(t_0)| < \delta$, остается в шаре $S$ при $t_0 \leq \ t \leq \infty$. Пока $x(t) \in D$, имеем $dv(x(t))/dt > 0$, значит, $v(x(t))$ возрасиает и $v(x(t)) > v(x(t_0)) = v_0 > 0$. Та часть $D_0$ множества $D \cup \Gamma$, где $v(x) \geq v_0-$ ограниченное замкнутое множество (в его предельных точках имеем тоже $x \in D \cup \Gamma, \ v(x) \geq v_0$ вследствие непрерывности $v(x)$). Решение $x(t)$ не может выйти из $D_0$, ибо не может пересечь подмножество линии уровня $(D \cup \Gamma) \cap \partial D_0 \ \ v(x) = v_0$ в сторону меньших значений $v(x) < v_0$, а на $\Gamma_1$ решение не попадает, так как $x(t) < \varepsilon$. На $D_0$ имеем $w(x) \geq \beta > 0$,

$$\frac{d}{dt}v(x(t)) \geq w(x(t)) \geq \beta, \quad v(x(t)) - v(x(t_0)) \geq \beta(t - t_0) \to \infty.$$

Это противоречит ограниченности функции $v(x)$ в $D_0$. Следовательно, нулевое решение неустойчиво.

**Пример.** Устойчиво ли нулевое решение системы

$$x' = ax + by - y^2, \quad y' = cx + dy - x^2, \quad a, b, c, d > 0.$$

При малых $x, y$ в первой четверти имеем $x' > 0, y' > 0$, значит, там решения удаляются от точки $(0, 0)$. Возьмем $v = xy$ в области $D = \{x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < \varepsilon^2\})$. Тогда

$$\frac{dv(x(t)), y(t))}{dt} = x'y + xy' = axy + by^2 - y^3 + cx^2 + dxy - x^3 = w(x, y)$$

При малых $\varepsilon$ и $0 < x < \varepsilon,\ 0 < y < \varepsilon\ w(x, y) > 0$ в $D$. По теореме (0.22) нулевое решение неустойчиво.

**Задачи для упражнений** задач. Филлипов, парагр. 15 N923-930

## Устойчивость по первому приближению

В теореме об устойчивости решений систем $x' = Ax$ с постоянными коэффициентами (лекция 7) были получены условия асимптотической устойчивости и условия неустойчивости. Приводимая в этой лекции теорема утверждает, что в случае $\max \operatorname{Re} \lambda_i \neq 0$ эти условия пригодны и для возмущения системы с постоянными коэффициентами– нелинейной системы $x' = Ax + \varphi(t, x)$, где $A$– постоянная матрица, $|\varphi(t, x)| \leq \varphi^*(x) = o(|x|)$ при $x \to 0$. К такому виду приводятся и многие автономные равновесные системы $x' = f(x),\ x \in R^n$, когда $f(x_0) = 0$. Разлагая $f(x)$ вблизи точки равновесия $x = x_0$ по формуле Тейлора до членов первого порядка малости, получим

$$x'_j = a_{j1}(x_1 - x_{10}) + \cdots + a_{jn}(x_n - x_{n0}) + \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, n,$$

где $a_{jk} = \partial f_j / \partial x_k|_{x=x_0},\ \varphi_j(x) = o(|x - x_0|)$ при $x \to x_0$.

Теорема 0.23 ((об устойчивости по первому приближению).): Рассмотрим систему

$$x' = Ax + \varphi(t, x), \quad x \in R^n. \tag{46}$$

Пусть при $t \geq 0,\ |x| \leq \varrho_0$ функция $\varphi \in C^1,\ |\varphi(t, x)| \leq \gamma(x)|x|,\ \gamma(x) \to 0, \quad x \to 0.$

1. Если матрица $A$ имет все $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$, то нулевое решение асимптотически устойчиво.
2. Если матрица $A$ имет хотя бы одно $\lambda$ с $\operatorname{Re} \lambda > 0$, то нулевое решение неустойчиво.
3. В "критическом"случае, т.е. когда $\max \operatorname{Re} \lambda_j = 0$, наличие устойчивости или неустойчивости зависит не только от матрицы $A$, но и от функции $\varphi(t, x)$.

Докажем теорему в случае, когда все $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$. Оценим столбцы матрицы $e^{tA}$. Эта матрица-фундаментальная для системы $y' = Ay$, ее столбцы $\psi^1(t), \ldots, \psi^n(t)$– решения этой системы. Каждое решение имеет вид $x = \mathcal{P}_1(t)e^{t\lambda_1} + \cdots + \mathcal{P}_m(t)e^{t\lambda_m 1}$, $\mathcal{P}_j(t)$– полиномы степени $k_j - 1,\ k_j$– размер наибольшей из жордановых клеток, содержащих $\lambda_j$. Пусть $\alpha > 0$ такое, что все $\operatorname{Re} \lambda_j < -\alpha < 0$. тогда $\operatorname{Re} \lambda_j + \alpha \leq -\mu < 0$ для всех $j$, поэтому

$$|\mathcal{P}_j(t)e^{(\lambda_j + \alpha)t}| \leq c_j, \quad 0 \leq t < \infty, \quad \Rightarrow \quad |\mathcal{P}_j(t)e^{t\lambda_j}| \leq c_j e^{t\alpha}, \quad 0 \leq t < \infty$$

Поэтому для некоторого $c > 0$

$$|\psi^k(t)| \le ce^{-t\alpha}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{47}$$

Функцию Ляпунова возьмем в виде

$$v(x) = \int_0^\infty \, |e^{\tau\, A}x|^2 d\tau.$$

Решение системы $y' = Ay$ с начальным условием $y(0) = x = (x_1, \dots, x_n)^\top$ есть

$$y(t) = e^{tA}x = x_1\psi^1(t) + \dots + x_n\psi^n(t),$$

так как $\psi^k(t)$ решение с начальным данным $\psi^k(0)$ равном $k-$ столбцу единичной матрицы. Поэтому

$$|e^{\tau A}x|^2 = |y(\tau)|^2 = y \cdot y = \sum_{ij=1}^n \, d_{ij}x_ix_j, \quad d_{ij}(\tau) = \psi^i(\tau) \cdot \psi^j(\tau).$$

В виду (47) имеем $|d_{ij}(\tau)| \le c^2e^{-2\alpha\tau}$. Отсюда

$$v(x) = b_{ij}x_ix_j, \quad b_{ij} = \int_0^\infty \, d_{ij}(\tau)\; d\tau$$

В силу оценки функции $d_{ij}(\tau)$ интегралы от них, а значит и интеграл в определении $v(x)$ сходится. Найдем $dv/dt$ в силу системы $y' = Ay$. Имеем

$$\frac{dv(y(t))}{dt}|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_0^\infty \, |e^{\tau\, A}y(t)|^2 d\tau|_{t=0}$$

Решение $y(t)$ с начальным условием $y(0) = x$ представимо в виде $y(t) = e^{tA}x$. Отсюда сделав замену $s = t + \tau$ получим

$$\frac{d}{dt}\int_0^\infty \, |e^{\tau\, A}y(t)|^2 d\tau|_{t=0} = \frac{d}{dt}\int_0^\infty \, |e^{(t+\tau)\, A}x|^2 d\tau|_{t=0} =$$

$$\frac{d}{dt}\int_t^\infty \, |e^{s\, A}x|^2 d\tau|_{t=0} = -|e^{s\, A}x|^2|_{t=0} = -|x|^2$$

Теперь найдем $dv/dt$ в силу возмущенной системы (46)($z' = Az + \varphi,\ z(0) = x$)

$$\frac{dv(z(t))}{dt} = \nabla_x v(z(t)) \cdot (Az(t) + \varphi(t, z(t))) =$$

$$= \nabla_x v(z(t)) \cdot\ Az(t) + \nabla_x v(z(t)) \cdot \varphi(t, z(t)) =$$

$$= -|x|^2 + \nabla_x v(z(t)) \cdot \varphi(t, z(t))$$

Оценим последний член. Считая что $|b_{ij}| \le b,\ i, j = 1, \dots, n$, Имеем

$$\frac{dv}{dx_i} = 2\sum_{j=1}^n \, b_{ij}x_j \Rightarrow \quad (\frac{dv}{dx_i})^2 \le 4\sum_{j=1}^n b_{ij}^2 \sum_{j=1}^n x_j^2 \le 4b^2n|x|^2,$$

Отсюда $|\nabla_x v(x)|^2 \le 4b^2n^2|x|^2$. Напомним что $|\varphi(t,x)| \le \gamma(x)|x|$. Поэтому

$$\frac{dv(x)}{dt}_{(46)} \le -|x|^2 + 2bn|x|\gamma(x)|x| \le -\frac{1}{2}|x|^2$$

в той области, где $\gamma(x) \le 1/(4bn)$. Кроме того, в силу определения $v(0)=0,\ v(x) > 0,\ x \ne 0$. Следовательно, $v(x)-$ функция Ляпунова для возмущенной системы и нулевое решение асимптотически устойчиво.

**Задача.** Доказать пункт 2) и 3) теоремы.

Утверждение 3) о критических случаях проверим пример:

**Примеры.**

1. При каких значениях параметра $a \in R$ нулевое решение системы

$$x' = x + (2-a)y, \quad y' = ax - 3y + (a^2 - 2a - 3)x^2$$

асимптотически устойчивр? устойчиво? неустойчиво? Характеристическое уравнение в этом случае

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2-a \\ a & -3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 2\lambda + a^2 - 2a - 3 = 0$$

По теореме Виета

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -2 < 0, \quad \lambda_1\lambda_2 = a^2 - 2a - 3 = (a-3)(a+1)$$

В зависимости от значений параметра $a$ получаем

1) $-1 < a < 3$, тогда $\lambda_1\lambda_2 < 0$, т.е. существует корень $\lambda > 0$, тогда по теореме (0.23) нулевое решение неустойчиво.

2) $a < -1$ или $a > 3$, тогда $\lambda_1\lambda_2 > 0$. Учитывая что $\lambda_1 + \lambda_2 = -2$ получаем два случая: в первом два отрицательных корня–устойчивость нулевого решения. Во втором случае корни комплексно сопряженные $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta i$. Тогда $\operatorname{Re}\lambda_{12} = -1$. Здесь также нулевое решение устойчиво.

3) $a = -1$ или $a = 3$, тогда $\lambda^2 + 2\lambda = 0,\ \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = -2$. Корни простые, а система линейная. В силу теоремы о структуре однородного решения системы $x' = Ax$ нулевое рещение устойчиво из-за наличия корня $\lambda_1 = 0$.

2. Устойчиво ли нулевое решение системы

$$x' = y - cx^3, \quad y' = -bx^3 - cy^3?$$

a) При $b = c = 0$ система линейная, $\lambda_{12} = 0$, жорданова клетка размера 2. В силу теоремы о структуре однородного решения системы $x' = Ax$ нулевое рещение неустойчиво. При других $b$ и $c$ имеем критический случай, возможна как устойчивость, так и неустойчивость.

b) При $b > 0$ возьмем $v(x,y) = 2y^2 + bx^4$. Тогда в силу системы

$$\frac{dv(x(t),y(t))}{dt} = -4bcx^6 - 4cy^4.$$

Если $c > 0$, то $dv/dt < 0(|x| + |y| \ne 0)$. По теореме Ляпунова–асимптотическая устойчивость. Если же $c = 0$, то $dv/dt \equiv 0$, т.е. устойчивость, но не асимптотическая тпк как $v(x(t),y(t)) \equiv c \ne 0$.

c) При $b \leq 0,\ c \leq 0$ неустойчивость. В этом случае $v = xy$ в области $D = \{x > 0,\ y > 0,\ x^2 + y^2 < \varepsilon^2\}$)(теорема Четаева (0.22)). Тогда

$$\frac{dv(x(t)),y(t))}{dt} = x'y + xy' = y^2 + |c|x^4 + |c|yx^3 + |b|xy^3 = w(x,y) > 0$$

в внутри области $D$. По теореме (0.22) нулевое решение неустойчиво.

**Задачи.** Исследовать устойчивость нулевого решения, построив функции Ляпунова и применив теоремы Ляпунова и Четаева:

1. Исследовать на устойчивость нулевое решение уравнения $x'' + p(t)x = 0,\ p = a^2(0 < t < \pi),\ p = b^2(\pi < t < 2\pi),\ p(t + 2\pi) \equiv p(t)$, при следующих значениях параметров

а) $a = 0.5,\ b = 0$;  б) $a = 0.5,\ b = 1$;
с) $a = 0.5,\ b = 1.5$;  в) $a = 0.75,\ b = 0$;
д) $a = 1,\ b = 0$;  е) $a = 1,\ b = 1,5$;

2. Исследовать, при каких $a$ и $b$ устойчиво нулевое решение системы с периодическими коэффициентами

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{x} \\ \overset{\circ}{y} \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A(t+2) \equiv A(t),$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 < t < 1, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad 1 < t < 2.$$

3.

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{x} \\ \overset{\circ}{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1(x) - f_2(y) \\ f_3(x) - f_4(y). \end{pmatrix}$$

где $\operatorname{sign} f_i(z) = \operatorname{sign} z,\ z \neq 0$ и положим $\operatorname{sign} f_i(0) = 0,\ i = 1,2,3,4$. Здесь функция Ляпунова $V(x) = |x| + |y|$, тогда для $x, y \neq 0$ имеем

$$\frac{dv}{dt} = \operatorname{sign} x[-\operatorname{sign} x - \operatorname{sign} y] + \operatorname{sign} y[\operatorname{sign} x - \operatorname{sign} y] = -2 < 0.$$

т.е. асимптотическая устойчивость в любой из четвертей фазовой плоскости. На прямой $x = 0$ поле скоростей $-\operatorname{sign} y(1,1),\ y \neq 0$, на прямой $y = 0$ поле скоростей $\operatorname{sign} x(-1,1),\ y \neq 0$ соответствует повороту против часовой стрелки.

## Лекция 9. Теорема Флоке-Ляпунова. Функция от матрицы.

В предыдущей лекции мы исследовали устойчивость нулевого решения малыми нелинейными возмущениями линейной системы с постоянными коэффициентами. В этой лекции мы исследуем устойчивость нулевого решения для линейной системы $x' = A(t)x$ с периодическим коэффициентами. что потребует аппарата функций от матриц.

**Показательная функция матрицы.** Для любого полинома $p(z)$ матрица $p(A) = a_0A^k + \cdots + a_0E$. Зная собственные вектора, можно определить

$$p(A) = \int_\gamma \frac{p(\lambda)}{A - \lambda E}\, d\lambda, \quad \frac{1}{A - \lambda E} = (A - \lambda E)^{-1}$$

где контур $\gamma$ в комплексной плоскости окружает собственные значения матрицы $A$. Достаточно проверить для $z^k$. Пусть $|A| \neq 0$. Для $k = 1$ имеем

$$\int_\gamma \frac{\lambda}{\lambda E - A}\, d\lambda = A \int_\gamma \frac{1}{\lambda E - A}\, d\lambda = A \int_{|\lambda|=R} \frac{1}{\lambda E - A}\, d\lambda = A$$

поскольку для достаточно большого $R \gg 1$

$$\int_{|\lambda|=R} \frac{1}{\lambda E - A}\, d\lambda = \int_{|\lambda|=R} \frac{1}{\lambda}\, (E + \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^{-1}A)^j))\, d\lambda = E$$

так как $\int_{|\lambda|=R} \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{\infty} (\lambda^{-1}A)^j)\, d\lambda \to 0$ когда $R \to \infty$. Далее

$$\int_\gamma \frac{\lambda^k}{\lambda E - A}\, d\lambda = A \int_\gamma \frac{\lambda^{k-1}}{\lambda E - A}\, d\lambda = A^k$$

так как в силу аналитичности $\int_\gamma \lambda^{k-1}\, d\lambda = 0$. Отсюда для любой аналитической функции $f(\lambda)$ можно определить

$$f(A) = \int_\gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda E - A}\, d\lambda$$

рассмотрев последовательность частичнх сумм $S_n \to f$, $S_n = \sum_{j=0}^{n} c_j A^j$, если для радиуса сходимости $R$ ряда для $f$ шар $\Omega_\gamma \subset K = \{|\lambda| \leq R\}$, $\Omega_\gamma$ -область, ограниченная контуром $\gamma$.

Ряд матриц $A_{(1)} + A_{(2)} + \ldots$ назовем сходящимся к матрице $S$ если для любых $i, j = 1, \ldots, N$ рад для компоненты $a_{(1)ij} + a_{(2)ij} + \ldots$ сходятся к элементам матрицы $S$. Аналогично определяется равномерная и абсолютная сэрдимость матричных рядовю. Теоремы о непрерывности суммы ряда и о почленной дифференцируемости и интегрировании рядов матриц остаются справедливыми. Для матриц положим $\|A\| = \max_{i,j=1,\ldots,N} |a_{ij}|$. Тогда $\|A^2\| \leq N\|A\|^2$

Лемма 0.8 ((лемма о мажоранте)): Если $\|A_{(m)}(t)\| \leq \alpha_m$, $m = 1, 2, \ldots$, $t \in I$, и числовой ряд $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots$ сходится, то ряд матриц $A_{(1)}(t) + A_{(2)}(t) + \ldots$ сходится абсолютно и равномерно на множестве $I$.

Для любой компоненты

$$|a_{(m)ij}(t)| \leq \|A_{(m)}(t)\| \leq \alpha_m$$

откуда следует абсолютная и равномерная сходимость каждой компоненты.

Лемма 0.9: Для любой квадратной матрицы $A$ и любого $t_1$ ряд

$$e^{tA} = E + \frac{t}{1!}A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \ldots$$

сходится абсолютно и равномерно в круге $|t| \leq t_1$ комплексной плоскости.

Для матрицы порядка $N \times N$ имеем $\|\frac{t^m}{m!}A^m\| \leq \frac{N^m|t|^m}{m!}\|A\|^m = \alpha_m$

**Свойства показательной функции.**

1. Если $AB = BA$, то $e^{A+B} = e^A e^B$. Действительно, имеем

$$e^A e^B = (E + \frac{1}{1!}A + \frac{1}{2!}A^2 + \dots)\ (E + \frac{1}{1!}B + \frac{1}{2!}B^2 + \dots) = \sum_{k,m=0}^{\infty} c_{km} A^k B^m$$

здесь мы воспользовались коммутативность матриц $AB = BA$. Далее

$$e^{A+B} = E + \frac{1}{1!}(A+B) + \frac{1}{2!}(A+B)^2 + \dots = \sum_{k,m=0}^{\infty} d_{km} A^k B^m$$

где числа $c_{km}, d_{km}$ можно вычислить, заменив матрицв на числа. Откуда следует, что $c_{km} = d_{km}$.

2. Имеем $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$. В самом деле

$$\frac{d}{dt}e^{tA} = \frac{d}{dt}\int_\gamma \frac{e^{t\lambda}}{\lambda E - A}\, d\lambda = \int_\gamma \frac{\lambda\ e^{t\lambda}}{\lambda E - A}\, d\lambda = A\int_\gamma \frac{e^{t\lambda}}{\lambda E - A}\, d\lambda = Ae^{tA}$$

Так как $e^{tA}|_{t=0} = E$, отсюда следует, что матрица $X(t) = e^{tA}$- фундаментальная матрица системы $x' = Ax$.

Следствие 0.4: Чтобы найти матрицу $e^{tA}$, $A-$ квадратная матрица порядка $n$, надо найти $n$ таких решений $x^k(t)$, $k = 1, \dots, n$, системы $x' = Ax$, что у $k-$ решения начальное условие $x^k(0)$ совпадает с $k-$ столбцом единичной матрицы. Эти решения являются столбцами матрицы $e^A$.

Матрицы, столбцами которых является линейно независимые решения системы $x' = Ax$, называются фундаментальными.

Теорема 0.24 ((Формула Лиувилля-Остроградского).): Пусть $W(t)$ вронскиан(определитель) матрицы $Z$, столбцами которой являются решения системы $X' = A(t)X$. Тогда для любых $t_0, t \in (\alpha, \beta)$ из интервала области определения решения

$$W(t) = W(t_0)e^{\int_{t_0}^t \ \mathbf{tr}A(\tau)d\tau}$$

Формула Лиувилля следует из равенства

$$\frac{d}{dt}W(t) = W_1(t) + \dots + W_N(t),$$

где $W_i(t)$ получаются из $W(t)$ заменой всех элементов $z_i^j$ $j-$ столбца на их производные $(z_i^j)' = a_{ik}z_k^j$ и $W_j = a_{jj}W(t)$. Отсюда следует, что

$$\frac{d}{dt}W(t) = a_{11}W(t) + \dots + a_{NN}(t)W(t) = \mathbf{tr}A(t)W(t).$$

Следствие 0.5: Из формулы Лиувилля $\frac{d}{dt}W(t) = \mathbf{tr}FW(t)$ следует, что если $W(t_0) \neq 0$, то $W(t) \neq 0$ для любого $t$ из области определения решения системы $x' = F$. Таким образом, матрица $Z$, столбцами которой являются решения системы $X' = A(t)X$, фундаментальна тогда и только тогда, когда ее определитель не равен нулю хотя бы в одной точке.

Приведем матрицу $e^A$ к жордановой форме. Пусть $A = C^{-1}ZC$, где $Z-$ жорданова форма. Тогда

$$e^A = E + \frac{1}{1!}C^{-1}ZC + \frac{1}{2!}(C^{-1}ZC)^2 + \dots = C^{-1}(E + \frac{1}{1!}Z + \frac{1}{2!}Z^2 + \dots)C = C^{-1}\ e^Z\ C$$

Если $Z$ разбита на жордановы ячейки $Z_j,\ j = 1, \dots, m_A$, то

$$e^Z = \begin{pmatrix} e^{Z_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{Z_2} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \end{pmatrix}$$

Теперь достаточноможно вычислить матрицу $e^{Z_j}$ порядка $m_j \times m_j$, где $Z_j = \lambda_j E_{m_j} + N_j$, $N_{m_j}$ нильпотентная матрица, т.е. $N_{m_j}^{m_j} = 0$. Тогда в силу коммутативности $EN = NE$ получим $e^{Z_j} = e^{\lambda_j E_{m_j}}\ e^{N_{m_j}} = e^{\lambda_j} E_{m_j} + \sum_{k=0}^{m_j-1} \frac{1}{k!}\ N_{m_j}^k$. Отсюда следует, что $e^{\lambda_j}$-собственные значения матрицы $e^A$, где $\lambda_j$-собственные значения матрицы $A$. Имеем

$$e^{tN_j} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{t}{1!} & \frac{t^2}{2!} & \cdots & \frac{t^{m_j-1}}{(m_j-1)!} \\ 0 & 1 & \frac{t}{1!} & \cdots & \frac{t^{m_j-2}}{(m_j-2)!} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{t^{m_j-3}}{(m_j-3)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}, \quad N_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

**Пример 1.** Найти $e^{tA}$ для $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$

**Пример 2.** Пусть функция $f(z)$ определена степенным рядом $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, сходящимся в круге $|z| < r$. Тогда для любой квадратной матрицы, собственные значения которой лежат в круге $|\lambda| < r$ ряд $f(A) = a_0 + a_1 A + a_2 A^2 + \dots$ сходится и его сумма принимается за $f(A)$. Для жордановой клетки $Z = \lambda E + N,\ N^k = 0$, имеем

$$f(Z) = \begin{pmatrix} f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \frac{f''(\lambda)}{2!} & \dots & \frac{f^{(k-1)}(\lambda)}{(k-1)!} \\ 0 & f(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{f^{(k-2)}(\lambda)}{(k-2)!} \\ 0 & 0 & f(\lambda) & \dots & \frac{f^{(k-3)}(\lambda)}{(k-3)!} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & f(\lambda) \end{pmatrix} \tag{48}$$

**Логарифм матрицы.** Теперь рассмотрим невырожденные матрицы $A$, $\det A \neq 0$. Для вещественных или комплексных чисел $w = \ln z$, т.е. $z = e^w$. Так как $e^{\alpha + i\beta} = e^{\alpha}(\cos\beta + i\sin\beta)$(формула Эйлера), то для числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ имеем

$$e^{\alpha} = r = |z|, \quad \beta = \varphi + 2\pi k$$

$k-$ любое целое, т.е.

$$\ln z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k), \quad r = |z|, \quad \varphi = \arg z.$$

Таким образом, $\ln z$ многозначная функция, которая определена при $z \neq 0$.

Определение 0.7: Логарифмом квадратной невырожденной матрицы $A$ называется матрица $L$ такая что $e^L = A$.

Теорема 0.25: Для любой невырожденной квадратной матрицы $A$ существует $\ln A$.

**Доказательство.** Сначала найдем логарифм жордановой клетки $Z = \lambda E + N = \lambda(E + H),\ \lambda \neq 0,\ H = N/\lambda$. Покажем, что $\ln(E + H) = F$, где

$$F = H - \frac{1}{2}H^2 + \frac{1}{3}H^3 - \dots$$

По определению логарифма, для этого надо доказать что $E^F = E + H$.

$$e^F = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1)^{j-1}}{j} H^j)^k = E + S,$$

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}(\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(1)^{j-1}}{j} H^j)^k \tag{49}$$

или $S = H$. Если $H-$ число, $|H| < 1$, то $S = e^{\in(1+H)} - 1 = H$. Так как ряд (50) остается сходящимся после замены всех членов их модцлями, то в ряде можно переставить члены и объединить члены с одинаковыми степенями $H$, т.е. $S = c_1H + c_2H^2 + c_3H^3 + \dots$. Каждое $c_m$ получается из конечного числа коэффициентов в (50) и не зависит от $H$(можно опять получить для чисел, тогда $S = e^{\in(1+H)} - 1 = H$, при $|H| < 1$, т.е. $_1 = 1, c_m = 0,\ m \geq 2$). Пусть теперь $H-$ матрица порядка $k \times k$, $H = N/\lambda \Rightarrow\ H^m = 0,\ m \geq k$. Тогда ряды в (50) превращаются в конечные суммы, перестановка и группировка членов закооны, и $S = c_1H + c_2H^2 + \dots + c_{k-1}H^{k-1}$. Коэффициенты $c_m$ получаются с помощью тех же действий, что и в случае, когда $H-$ числа, поэтому $c_m$ те же самые, т.е. $_1 = 1, c_m = 0,\ m \geq 2$. Значит и в случае $H = N/\lambda$ имеем $S = H$, т.е. $\ln(E + H) = F$.

Рассматривая данную жорданову клетку берем всегда одну и туже ветвь логарифма. При $\lambda \neq 0$

$$e^{\ln \lambda E + F} = e^{\ln \lambda E} e^F = \lambda(E + H) = \lambda E + N.$$

Таким образом

$$\ln Z = \ln \lambda E + \frac{1}{\lambda}N - \frac{1}{2\lambda^2}N^2 + \frac{1}{3\lambda^3}N^3 - \dots + \frac{(-1)^{k-2}}{(k-1)\lambda^{k-1}}N^{k-1}$$

Заметим, что из формулы (50) для $Z = \lambda E + N,\ N^k = 0$, получим

$$\ln(Z) = \begin{pmatrix} \ln(\lambda) & \frac{1}{1!\lambda} & \frac{-1}{2!\lambda^2} & \dots & \frac{(-1)^{(k-2)}}{(k-1)!\lambda^{k-1}} \\ 0 & \ln(\lambda) & \frac{f'(\lambda)}{1!} & \dots & \frac{(-1)^{(k-3)}}{(k-2)!\lambda^{(k-2)}} \\ 0 & 0 & \ln(\lambda) & \dots & \frac{-1)^{(k-4)}}{(k-3)!\lambda^{(k-3)}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \ln(\lambda) \end{pmatrix} \tag{50}$$

Если же жорданова матрица $B$ состоит из клеток $Z_1, Z_2, \dots, Z_m$, все $\lambda_j \neq 0,\ j = 1, \dots, m$ то $\ln B$ есть матрица $D$ состоящая из клеток $\ln Z_j,\ j = 1, \dots, m$. Так как $e^D$ состоит из клеток $e^{\ln Z_j}$, т.е. $Z_j$, значит $e^D = B$. Для любой невырожденной $A = C^{-1}BC,\ \det B \neq 0$, то

$$\ln A = C^{-1}(\ln B)C$$

**Задача.** Если невырожденная матрица $A,\ \det A \neq 0$, равна квадрату вещественной матрицы, то существует вещественный $\ln A$.

## Лекция 10. Теорема Флоке-Ляпунова.

Рассмотрим линейную систему

$$x' = A(t)x, \quad x \in R^n \tag{51}$$

Предполагается, что матрица $A(t)-$ непрерывная функция от $t$ с периодом $T$. Пусть $X(t)-$ любая фундаментальная матрица системы (51)($X' = AX,\ \det X(0) \neq 0$), тогда матрица $Y(t) = X(t+T)$ тоже фундаментальная, так как $\det Y(t) \neq 0$ и

$$Y'(t) = X'(t+T) = A(t+T)X(t+T) = A(t)Y(t)$$

Теорема 0.26 (переход от одной фундаментальной матрицы к другой.): Пусть $X(t)-$ фундаментальн матрица, $C$ неособая($\det C \neq 0$) постоянная матрица порядка $N \times N$. Тогда $Y(t) = X(t)C-$ фундаментальная матрица той же системы. По этой формуле из данной фундаментальной матрицы $X(t)$ можно получить лююбую фундаментальнуюй матрицу $Y(t)$, подбирая $C$. Матрица $M$ такая что $X(t+T) = X(t)M$ называется матрицей монодромией, а ее собственные значения–мультипликаторами. Отсюда следует, что для любого целого $k$

$$X(t+kT) = X(t)M^k \tag{52}$$

Если $X(t), Y(t)$ две фундаментальной матрицы. Положим $X^{-1}(t_0)Y(t_0) = C$. Столбцы матрицы $Z(t) = X(t)C$-решения той же системы. Пусть $c^i,\ x^i(t)$ столбцы матриц $C$ и $X$. Тогда $z^i = X(t)c^i$. Значит $Z(t)-$ решение и так как $\det Z(t) = \det X(t)\det C \neq 0$ то решения $z^i(t)$ линейно независимы и матрица $Z(t)$ -фундаментальная. В тоже время $Z(t_0) = Y(t_0)$. В силу теоремы единственности $Z(t) \equiv Y(t)$.

Лемма 0.10: Для другой фундаментальной матрицы $Z(t)$ имеем другую матрицу монодромии $M_1$. Матрицы $M$ и $M_1$ подобны: $M_1 = C^{-1}MC$. Поэтому все матрицы монодромии имеют одну и ту же жорданову форму и одни и теже мультипликаторы.

По теореме (0.26) $Z(t) = X(t)C$. Тогда

$$X(t)CM_1 = Z(t)M_1 = Z(t+T) = X(t+T)C = X(t)MC \quad \Rightarrow \quad CM_1 = MC,$$

так как $\det X(t) \neq 0$.

**Геометрический смысл матрицы монодромии и мультипликаторов.** Пусть $X(t)$ фундаментальная матрица с $X(0) = E$. Для любого $x_0 \in R^N$ функция $x(t) = X(t)x_0$ есть решение системы с начальным условием $x(0) = x_0$. Тогда

$$x(T) = X(T)x_0 = Mx_0.$$

т.е. сдвиг по интегральной кривой системы за промежуток времени $0 \le t \le T$ есть линейное преобразование $x(T) = Mx_0$ с матрицей монодромии $M$. В силу периодичности системы $x(2T) = M^2 x_0$ и т.д. Пусть $v$ собстенный вектор для $M$ и $Mv = \mu v$. Тогда $x(t) = X(t)v$ решение с $x(0) = v$. Отсюда

$$x(t+T) = X(t+T)v = X(t)Mv = \mu X(t)v = \mu x(t).$$

Т.е. за каждый промежуток времени длины $T$ это рещение увеличивается в $\mu$ раз(если $\mu > 1$), точнее умножается на $\mu$.

Теорема 0.27 ((Теорема Флоке-Ляпунова).): Для системы (51) любая фундаментальная матрица может быть представлена в виде

$$X(t) = K(t)e^{tB}, \tag{53}$$

где матрица $K(t)$ непрерывна и имеет период $T$, а $B$ постоянная матрица: $B = T^{-1} \ln M$

**Доказательство.** По определению матрицы монодромии $X(t+T) = X(t)M$. Так как $\det M \ne 0$ то существует матрица $B$ такая , что $e^{TB} = M$. Возьмем матрицу $K(t) = X(t)e^{-tB}$. Она непрерывна, $K'(t)$ тоже. Покажем, что она имеет период $T$.

$$K(t+T) = X(t+T)e^{-(t+T)B} = X(t)Me^{-TB}\ e^{-tB} = X(t)\ e^{-tB}$$

так как $Me^{-TB} = E$. Отсюда $K(t+T) = K(t)$.

Изложенные результаты позволяют исследовать решение системы (51) на бесконечном интервале. Если на отрезке длины $T$ найдено, например на ЭВМ, $N$ линейно независимых решений, то можно найти матрицу монодромии $M$ отсюда в силу (52) продолжаем решение глобально, формула (53) позволяет судить о поведении всех решений системы на бесконечности (разделение периодической и непериодической частей). Например, для стремления всех решений к нулю при $t \to \infty$ необходимо и достаточно, чтобы модули всех мультипликаторов были меньше единицы. Тогда $M^k \to 0,\ k \to \infty$.

**Задачи.**

1. Исследовать, при каких $a$ и $\alpha$ устойчиво нулевое решение системы с периодическими коэффициентами

$$\begin{pmatrix} \overset{\circ}{x} \\ \overset{\circ}{y} \end{pmatrix} = A(t) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A(t+2) \equiv A(t),$$

$$A(t) = A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 < t < 1; \quad A(t) = \alpha E, \quad 1 < t < 2.$$

Фундаментальную матрицу на отрезке $[0,1]$ запишем в виде $X(t) = e^{tA_1}$. Тогда $X(1) = e^{A_1} = E + A_1$. Фундаментальная матрица на отрезке $[1,2]$: $X(t) = e^{\alpha(t-1)}X(1)$. Тогда $X(2) = e^{\alpha}(E + A_1)$. Матрица монодромии $M = X(0)^{-1}X(2) = X(2) = e^{\alpha}(E + A_1)$. Отсюда $M^k = e^{k\alpha}(E + kA_1)$. Следовательно $M^k \to 0$ если $\operatorname{Re}\alpha < 0$ и нулевое решение асимптотически устойчиво. Если $\alpha = i\beta$ чисто мнимое и $a \ne 0$ матрицы $M^k$ неограничены. Также они неограничены если $\operatorname{Re}\alpha > 0$. В этих двух случаях нулевое решение неустойчтво. В случае $\mathrm{Re}\,\alpha = a = 0$ нулевое решение устойчиво по Ляпунову.

2. Рассмотрим систему $x' = a(t)x + x^2 f(t)$, где функции $a(t), f(t)$ $2\pi$ периодичны. При каких условиях на функции $a, f$ в малой окрестности $x = 0$ существует $2\pi$ периодическое решение. Положим $x = \varepsilon y$. Имеем

$$y' = a(t)y + \varepsilon y^2 f(t). \tag{54}$$

Решение уравнения при $\varepsilon = 0$:

$$y(t,0) = e^{\int_0^t a(s)ds}\ b = K(t)\ e^{\frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(s)ds}\ b$$

имеет структуру теоремы Флоке-Ляпунова с $2\pi$ периодической функцией

$$K(t) = e^{\int_0^t a(s)ds - \frac{t}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(s)ds} \quad \text{и} \quad M = e^{\int_0^{2\pi} a(s)ds}$$

Поэтому нулевое решение уравнения $y' = a(t)y$ асимптотически устойчиво, если $\int_0^{2\pi} a(s)ds < 0$ и неустойчиво, если $\int_0^{2\pi} a(s)ds > 0$.
Решение $y(t,0)$ $2\pi$ периодично, тогда и только тогда, когда $M = 1$ т.е. $\int_0^{2\pi} a(s)ds = 0$. Для $\varepsilon > 0$ решение $y(t,\varepsilon) = e^{\int_0^t a(s)ds} C(t,\varepsilon)$ с начальным условием $y(0,\varepsilon) = b$ определяется уравнением

$$C' = \varepsilon\ e^{\int_0^t a(s)ds} C^2 f(t) \quad \Rightarrow \quad C(t) = \frac{b}{1 - \varepsilon\ b\int_0^t e^{\int_0^s a(\mu)d\mu} f(s)ds}$$

если $\varepsilon$ настолько мало, что $\varepsilon\ b\int_0^t e^{\int_0^s a(\mu)d\mu}|f(s)|ds < 1,\ 0 \le t \le 2\pi$. Таким образом

$$y(t,\varepsilon) = \frac{b e^{\int_0^t a(s)ds}}{1 - \varepsilon\ b\int_0^t e^{\int_0^s a(\mu)d\mu} f(s)ds} \rightarrow\ y(t,0) \ \text{ при } \ \varepsilon \rightarrow 0,$$

равномерно на отрезке $[0, 2\pi]$. Это решение $2\pi$ периодично, если

$$\int_0^{2\pi} e^{\int_0^s a(\mu)d\mu} f(s)ds = 0$$

**Предельные циклы.** Интересный физический объект–так называемые **автоколебания**(пределы циклы). Теоретически предельные циклы были введены Пуанкаре. Они соответсвуют обнаруженным физиками в физических системах устойчивым периодически движения, возникающим без воздействия внешней силы(пример-часы).Замкнутые траектории автономных систем на плоскости чаще всего бывают двух типов:

А. Имеется бесконечное множество замкнутых траекторий, вложенных друг в друга и заполняющих некоторую область. Пример: траектории вблизи особой точки типа центр.

Б. Отдельные замкнутые траектории, к которым все близкие траектории неограниченно приближаться(необязательно монотонно) при $t \to +\infty$ или при $t \to -\infty$. Такие замкнутые траектории называются предельными циклами.

Предельные циклы бывают устойчивые–к которым приближаются все близкие траектории при $t \to +\infty$, неустойчивами–к которым близкие траектории приближаются при $t \to -\infty$ и полуустойчивыми–когда с одной стороны отцикла траектории приближаются при $t \to +\infty$, а с другой стороны– $t \to -\infty$
Примеры.

1. Система в полярных координатах

$$r' = cr(1-r^2)^m, \quad \varphi' = 1, \quad m \in N,$$

имеет замкнутую траекторию $r = 1$. В случае $c > 0$ и нечетного $m \geq 1$ в области $0 < r < 1$ имеем $r' >$, траектория $r(t)$ возрастает; напротив, в области $r > 1$ имеем $r' < 0$ и $r(t)$ убывает(устойчивый предельный цикл). Аналогично показываем, что для $c < 0$ и нечетного $m \geq 1$ цикл $r = 1$ неустойчив. В случае $c \neq 0$ и четном $m \geq 2$ цикл полуучтойчив.

2. Рассмотрим систему

$$x' = y, \quad y' = -x - F(y) \tag{55}$$

Теорема 0.28 (Терема о предельном цикле.): Если $F \in C^1,\ F(0) = 0,\ F'(0) < 0, F(y) < k$ при $y \leq -b$ и $F(y) \geq m > k$ при $y \geq b > 0$, то система (55) имеет периодическое решение $x(t) \neq \text{const},\ y(t) \neq \text{const}$.

**Доказательство.** На плоскости $x, y$ построим замкнутую кольцевую область $K$ без особых точек, из которой не выходят решения системы (55). Внутренняя граница $\Gamma_{in}$ кольца $K$- окружность $x^2 + y^2 = r^2$, где $r$ таково, что $yF(y) < 0$ при $0 < y \leq r$. Тогда в силу системы

$$\frac{d}{dt}(x^2 + y^2) = -2yF(y) \geq 0,$$

то решения системы (55) не могут выйти из $K$ внутрь круга $x^2 + y^2 < r^2$. Наружная граница $\Gamma_{ex}$ кольца состоит из нескольких частей. В полуплоскости $y \geq b$ граница $\Gamma_{ex}$ есть дуга окружности $(x+m)^2 + y^2 = R^2$, где $R$ выберем ниже. Тогда в силу системы (55)

$$\frac{d}{dt}((x+m)^2 + y^2) = 2y(m - F(y)) < 0,$$

так как $F(y) > m$ при $y \geq b$. Траектории входят в $K$. Аналогично, при $y \leq -b$ берем дугу окружности $(x+k)^2 + y^2 = R^2$, где

$$\frac{d}{dt}((x+k)^2 + y^2) = 2y(k - F(y)) < 0,$$

так как $F(y) < k$ при $y \leq -b$. Траектории также входят в $K$ На вертикальных отрезках $AH$ и $CD$(соединяющих левый конец верхней дуги с осью $x$ и правый конец нижней дуги с осью $x$) соответственно имеем $x' = y > 0$ и $x' = y < 0$, поэтому через них траектории входят в $K$. Пусть $B$-правый конец верхней дуги и $B$-левый конец нижней дуги. Угловые коэффициенты отрезков $BC$ и $EH$ равны $-b/(m-k)$. На траекториях, пересекающих эти отрезки, имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + F(y)}{y}.$$

Здесь $|y| \le b,\ F(y)$ ограничена. Выбирая $R$ достаточно большим мы увеличиваем $|x|$ так чтобы

$$\frac{dy}{dx} < \ -\frac{b}{m-k}.$$

Тогда траектории через эти отрезки также входят в $K$. Таким образом, из замкнутой кольцевой области $K$ без особых точек не выходит ни одна траектория системы (55).

Определение 0.8: Для траектории $T(x = \varphi(t),\ -\infty < t < \infty)$ $\omega-$ предельной точкой называется такая точка $p$, что существует последовательность $t_1, t_2, \dots \to \infty$, по которой $\varphi(t_i) \to p$ при $i \to \infty$. Множество $\Omega(T)$ всех $\omega-$ предельных точек траектории $T$ называется ее $\omega-$ предельным множеством.

Теорема 0.29 (Теорема Бендиксона.): Ограниченное $\omega-$ предельное множество на плоскости, не содержащее особых точек, является замкнутой траекторией.

Приведем для рассмотренного выше случае доказательство этой теоремы. Из построения множества $K$ следует, что все $\omega$ предельные множества, лежащих в нем траекторий– ограничены и не имеют особых точек, т.е. по теореме Бендиксона-замкнутые(или замкнутая) траектории. Докажем в нашем случае это впрямую. Рассмотривая знак $x'$ при $y < 0$ и $y > 0$ и знак $y'$ на полуосях оси $Ox$, видим что траектория из любой точки $(x, 0)$ отрезка $MC$ соединяющего $\Gamma_{in}$ и $\Gamma_{ex}$, при возрастании $t$ делает оборот вокруг точки $(0, 0)$ и возвращается на $MC$ в точку $(\varphi(x), 0)$. Так как $F \in C^1$, то различные траектории не имеют общих точек, поэтому на двух достаточно малых отрезках $[M, M_\delta] \subset [M, C]$ и $[C_\delta, C] \subset [M, C]([M, M_\delta], [C_\delta, C]$ не пересекаются) функция $\varphi(x)$ строго монотонно возрастает на $[M, M_\delta]$ и строго монотонно убывает на $[C_\delta, C]$. В первом случае на любой линии $\Gamma_\mu = \{(x, y),\ |(x, y)| = r + \mu\}$ траектории выходят из области, ограниченной кривыми $\Gamma_{in}, \Gamma_\mu$. Во втором случае на любой линии уровня $\Gamma_\gamma,\ 0 < \gamma < \delta$, $\Gamma_\gamma = \{(x, y),\ \varrho((x, y), \Gamma_{ex}) = \gamma\}$ траектории также выходят из области, ограниченной кривыми $\Gamma_{ex}, M_\gamma$. Тогда для любой точки $N \in (\varphi(r), \varphi(x(C)),\ C = (x(C), 0)$, из теоремы о продолжении решения траектория стартующая в $(x(0), y(0)) = N$ в обратном направлении $(t < 0)$ будет продолжена до точки $\varphi(-T(N)) \in (M, C)$. Отсюда следует, что функция $\varphi(x)$ определена на отрезке $[M, C]$ и отображает его однозначно на самого себя. Теперь рассмотрим множества $\Omega^+ = \{(x, 0) \in [M, C],\ \varphi(x) - x > 0\}$ и $\Omega^- = \{(x, 0) \in [M, C],\ \varphi(x) - x < 0\}$. Из приведенного выше следует, что $[r, r + \delta] \in \Omega^+,\ [x(C), x(C) - \delta] \in \Omega^-$, т.е. эти множества не пусты; в силу теоремы о непрерывной зависимости от начальных данных множества $\Omega^\pm$–открыты. Если бы не было неподвижных точек отображения $\varphi$ эти бы множества были бы и замкнты, так как тогда $\varphi > 0$ на замыкании $\overline{\Omega^+}$ и $\varphi < 0$ на замыкании $\overline{\Omega^-}$, что не возможно, поскольку тогда одно из этих множеств должно совпадать с отрезком $[M, C]$ а другое пусто. Таким образом, существует $x_*$ такое, что $\varphi(x_*) = x_*$. Т.е. траектория, выходящая из $(x_*, 0)$-замкнутая линия. Решение (55) с начальными условиями $x(0) = x_1,\ y(0) = 0$ периодическое.

**Пример.** Найти предельный цикл и исследовать его на устойчивость

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{x} & = & -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \dot{y} & = & x + y(1 - x^2 - y^2) \end{array} \right. ,$$

Нетрудно видеть, что предельный цикл- окружность $x^2 + y^2 = 1$, т.е. $x = \cos t,\ y = \sin t$. Умножая первое уравнение на $x$, второе на $y$, для $Z = x^2 + y^2$ получим

$$\frac{1}{2}\frac{dZ}{dt} = Z(1 - Z)$$

Положения равновесия $Z = 0$ и $Z = 1$. Первое неустойчиво, второе устойчиво. Следовательно $x = \cos t,\ y = \sin t$–устойчивый предельный цикл.
Чтобы исследовать периодическое решение $\varphi(t)$ на устойчивость линеаризуем систему на этом решении. Сделав замену $x = y + \varphi$, получим систему $y' = f(\varphi(t) + y) - f(\varphi(t))$, линеаризуя которую получим систему $y' = \nabla_x f(\varphi(t))y$, к которой можно приенить теорему Флоке-Ляпунова. В рассмотренном случае получим линеаризованную систему

$$x' = y, \quad y' = -x - F'(\varphi)y.$$

# МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ.

## Лекция 11. Колебания.

Поскольку линейные уравнения легко решать и исследовать, теория линейных колебаний является самым разработанным отделом механики. Во многих нелинейных задачах линеаризация приводит к удовлетворительному приближенному решения. Даже когда это не так, исследование линеаризованной задачи часто является первым шагом при изучении соответствия движения нелинейной системы и ее линейной модели. В этой лекции мы дадим определение малых колебаний.

**Положение равновесия.** Точка $x_0$ называется положением равновесия автономной системы

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad x \in R^n, \tag{56}$$

если $x(t) \equiv x_0$ есть ее решение. Иными словами, $f(x_0) = 0$, т.е. в точке $x_0$ векторное поле $f(x)$ обращается в нуль. Теперь рассмотрим натуральную динамическую систему с функцией Лагранжа

$$L = T - U,\ T = \frac{1}{2}\sum a_{ij}(q)\ \mathring{q}_i \mathring{q}_j \geq 0,\ U = U(q),$$

$$\frac{d}{dt}(\sum a_{ij}(q)\ \mathring{q}_j) = -\partial_{q_i} U, \quad q = (q_1, \dots, q_n)$$

Если записать как систему первого порядка

$$\frac{d}{dt}p_i = -\partial_{q_i} U, \quad p_i = \sum a_{ij}(q)\ \mathring{q}_j \tag{57}$$

Положение равновесия с учетом $\frac{1}{2}\sum a_{ij}(q)\ \mathring{q}_i \mathring{q}_j \geq 0$ определяется системой

$$\partial_q U(q) = 0, \quad \sum a_{ij}(q)\ \mathring{q}_j = 0\ \Rightarrow\ \mathring{q} = 0$$

**Устойчивость положения равновесия.** Займемся теперь исследованием движений при начальных условиях, близких к положению равновесия.

Теорема 0.30: Если точка $q_0$ есть строгий локальный минимум потенциальной энергии $U$, то положение равновесия $(q_0, 0)$ устойчиво по Ляпунове, т.е. для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon)$ такое что

$$|q(t, q(0), p(0)) - q_0| + |p(t, q(0), p(0))| \leq \varepsilon, \quad \forall t \geq 0, \quad |q(0) - q_0| + |p(0)| \leq \delta(\varepsilon),$$

где $q(t, q(0), p(0)), p(t, q(0), p(0))$-глобальное решение системы (57) с начальными данными

$$q|_{t=0} = q(0), \;\; p|_{t=0} = p(0).$$

Пусть локальный минимум $U(q_0) = h$. При достаточно малом $\varepsilon > 0$ содержащая $q_0$ связная компонента $D$ множества $\{q: \;\; U(q) \leq h + \varepsilon\}$ будет сколь угодно малой окрестностью точки $q_0$. При этом связная компонента соответствующей области $\{p, q: \;\; E(p, q) \leq h + \varepsilon\}$

$$p = \frac{\partial T}{\partial \overset{\circ}{q}} - \text{ импульс}, \quad E = T + U - \text{ полная энергия}$$

в фазовом пространстве $p, q$ будет сколь угодно малой окрестностью точки $p = 0, \; q = q_0$. Область $\{p, q \; : \;\; E(p, q) \; \leq \; h + \varepsilon\}$ инвариантна относительно фазового потока по закону сохранения энергии. Отсюда, в силу теоремы Пуанкаре, при достаточно близких к $(0, q_0)$ начальных условиях $p(0), \;\; q(0)$ вся фазовая траектория $p(t), \;\; q(t)$ близка к $p(0), \;\; q(0)$.

**Задачи.**

1. Может ли положение равновесия $(0, q_0)$ быть асимптотически устойчивым (нет)?

2. Докажите, что в системе с одной степерью свободы, $U \in C^2$, положение равновесия $(0, q_0)$ не является точкой строгого локального минимума потенциальной энергии, неустойчиво по Ляпунову.

Для простоты будем считать, что $q_0 = 0$. В четверти $D = \{x > 0, y > 0; \; |x|^2 + |y|^2 < \varepsilon^2\}$ функция Ляпунова $v = xy$ и

$$x' = y, \quad y' = -U'(x) = xg(0)^2 + \varphi(x), \quad |\varphi| = o(|x|).$$

Тогда

$$\frac{dv}{dt} = y^2 + yx(g^2(0)x + \varphi) > \; \frac{1}{2}y(y + g^2(0)x^2) = w(x, y)$$

Для достаточно малого $\varepsilon \ll 1$ функция $w(x, y) > 0$ внутри области $D$ и равна нулю на чпсти ее границв при $y = 0$. По теореме Четаева это положение равновесия неустойчиво.

**Линеаризация системы.** Вернемся к общей системе (56). При исследовании решений этой системы близких к положению равновесию $x_0$, часто пользуются линеаризацией. Предположим, что $x_0 = 0$(общий случай приводится к этому сдвигом системы координат). Тогда первй член ряда Тейлора $f$ линейный

$$f(x) = Ax + R_2(x), \quad A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{x=0}, \quad R_2 = O(|x|^2)$$

где линейный оператор $A$ в координатах $x_1, \dots, x_n$ задается матрицей $a_{ij}$:

$$(Ax)_i = \sum_j a_{ij} x_j, \quad a_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$$

Переход от системы (56) к системе

$$\frac{dy}{dt} = Ay, \quad (x \in R^n, \ y \in TR_0^n) \tag{58}$$

называется **линеаризацией** системы (56).
**Задача.** Докажите, что линеаризация–корректно определенная операция: оператор $A$ не зависит от системы координат(линейная часть приращения).
Преимущество линеаризации–она немедленно решается:

$$y(t) = e^{At} y(0), \quad e^{At} = E + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \dots$$

При достаточно малых $x$ разница между линеаризованной и исходной системами $R_2(x)$ мала по сравненнию с $x$. Поэтому в течение некоторого времени решения $y(t), \ x(t)$ обеих систем с еачальным условием $y(0) = x(0) = x_0$ остается близкими.

Теорема 0.31: Для любого $T > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(T, \varepsilon) > 0$ такое, что если $|x(0)| \leq \delta(\varepsilon, T)$, то $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon$ для всех $t$ из интервала $0 < t < T$.

(терема о непрерывной зависимости от правой части системы).
**Линеаризация лагранжевой системы.** Обратимся снова к лагранжевой системе (57) и постараемся ее линеаризовать в окрестности положения равновесия $(0, q_0)$. Для упрощения формул выберем координаты так, чтобы $q_0 = 0$.

Теорема 0.32: Чтобы линеаризовать лагранжеву систему (57) в окрестности положения равновесия $q = 0$, достаточно заменить кинетическую энергию $T = \frac{1}{2} \sum a_{ij}(q) \overset{\circ}{q}_i \overset{\circ}{q}_j$ ее значением при $q = 0$

$$T_2 = \frac{1}{2} \sum a_{ij}(0) \overset{\circ}{q}_i \overset{\circ}{q}_j$$

а потенциальную энергию $U(q)$–ее квадратичной частью

$$U_2 = \frac{1}{2} \sum b_{ij} q_i q_j, \quad b_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial q_i \partial q_j} U|_{q=0}$$

Действительно, так как $p = q = 0$ есть положение равновесия, то разложения правых частей в ряд Тейлора в нуле начинаются с линейных по $p, q$ членов. Так как правые части–частные производные, то эти линейные члены определяются квадратичными членами $H_2$ разложения $H(p, q)$. Но $H_2$ есть в точности функция Гамильтона системы с лагранжианом $L_2 = T_2 - U_2$, так как очевидно $H_2 = T_2(p) + U_2(q)$. Итак, линеаризованные уравнения движения суть уравнения движения для описанной в теореме системы с $L_2 = T_2 - U_2$.
**Примеры.** Рассмотрим систему с одной степеью свободы

$$T = \frac{1}{2} a(q) \overset{\circ}{q}{}^2, \ U = U(q).$$

Пусть $q = q_0$ устойчивое положение равновесия

$$\frac{\partial U}{\partial q}|_{q=q_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}|_{q=q_0} > 0$$

Как мы знаем из фазового портрета, при близких к $q = q_0,\ p = 0$ начальных условиях решение периодично, с периодом $\tau$, зависящем, вообще говоря, от начальных услови. Из предыдущих двух теорем вытекает

Определение 0.9: Движения в линеаризованной системе ($L_2 = T_2 - U_2$) называются малыми колебаниями вблизи положения равновесия $q_0$(в случае когда положение равновесия неустойчиво, мы будем говорить о "неустойчивых малых колебаниях", хотя движение при этом и не имеет колебательного характера). В одномерной задаче числа $\tau_0, \omega_0$ называются периодом малых колебаний и частотой малых колебаний.

**Пример.** Найти период малых колебаний бусинки массы 1 на провололчке $y = U(x)$ в поле тяжести с $g = 1$ вблизи положения равновесия $x = x_0$.
**Решение.**Имеем

$$U = U(x), \quad T = \frac{1}{2}v^2 = \frac{1}{2}\overset{\circ}{x}^2 .$$

Пусть $x_0-$ устойчивое положение равновесия

$$U(x_0) = \frac{\partial U}{\partial x}|_{x=x_0} = 0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}|_{x=x_0} > 0.$$

Тогда частота малых колебаний $\omega$ определяется формулой

$$\omega^2 = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}|_{x=x_0} > 0$$

ибо для линеаризованной системы $T_2 = \overset{\circ}{q}^2/2,\ U_2 = \omega^2 q/2, \quad q = x - x_0$.
**Задача.** Показать, что не только малые колебания, но и все движения бусинки в точности эквивалентно движению в некоторой одномерной системе с функцией Лагранжа

$$L = \frac{1}{2}\overset{\circ}{q}^2 - V(q).$$

Надо принять за $q$ длину вдоль проволоки.

## Малые колебания.

Здесь показано, что лагранжева система, совершающая малые колебания, распадается в прямое произведение с одной степенью свободы.

**Задача о паре форм.** Рассмотрим подробнее задачу о малых колебаниях. Иными словами, рассмотрим ситстему, у которой кинетическая и потенциальная энергии–квадратичные формы

$$T = \frac{1}{2}(A\overset{\circ}{q}, \overset{\circ}{q}), \quad U = \frac{1}{2}(Bq, q), \quad q \in R^n, \quad \overset{\circ}{q} \in R^n. \qquad (59)$$

Кинетическая энергия–положительно определенная форма. Чтобы проинтегрировать уравнения Лагранжа, выберем разумным образом координаты. Как известно из линейной алгебре, пара квадратичных форм $(Aq, q)$, $(Bq, q)$, первая из которых положительно определена, можно привести к главным осям единой линейной заменой координат( если угодно, можно ввести евклидову структуру, приняв первую форму за скалярный квадрат, изатем ортогональным в смысле этой евклидовой структуры преобразованием привести вторую форму к главным осям)

$$Q = Cq, \quad Q = (Q_1, \ldots, Q_n).$$

При этом координаты $Q$ можно выбрать так, что форма $(Aq, q)$ приведена к сумме квадратов $(Q, Q)$. Пусть $Q-$ такие координаты; тогда $\overset{\circ}{Q}= C \overset{\circ}{q}$ и

$$T = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \overset{\circ}{Q}_j, \quad U = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \lambda_j Q_j^2.$$

Числа $\lambda_j$ называются собственными числами формы $B$ относительно $A$.
**Задача.** Докажите, что собственные числа $B$ относительно $A$ удовлетворяют характеристическому уравнению

$$\det|B - \lambda A| = 0, \tag{60}$$

все корни которого, таким образом, вещественны (матрицы $A$, $B$ симметричны, $A > 0$).

**Собственные колебания.** В координатах $Q$ система Лагранжа распадается на $n$ независимых уравнений

$$\overset{\circ\circ}{Q}= -\lambda_i Q_i$$

Итак, доказана

Теорема 0.33: Система, совершающая малые колебания, есть прямое произведение $n$ одномерных систем, совершающих малые колебания.

Для каждой одномерной систем могут представиться три случая
1. $\lambda = \omega^2 > 0$, решение $Q = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$(колебания)
2. $\lambda = 0$, решение $Q = C_1 + C_2 t$(безразличное равновесие)
3. $\lambda = -k^2 > 0$, решение $Q = C_1 \mathrm{ch} kt + C_2 \operatorname{sh} kt$(неустойцивость)

**Следствие.** Пусть одно из собственных чисел (63) положительно: $\lambda = \omega^2 > 0$. Тогда система (62) может совершать периодическое колебание вида

$$\mathbf{q}(t) = (C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t)\xi, \tag{61}$$

где $\xi$ соответствующий $\lambda$ собственный вектор $B\xi = \lambda A\xi$. Это колебание–произведение одномерного движения $Q_j = C_1 \cos\omega_j t + C_2 \sin\omega_j t$, $\omega_j^2 = \lambda$ и тривиальных движение $Q_i = 0 (i \neq j)$.

Заключение 0.6: Опять рассмотрим систему с одной степенью свободы

$$T = \frac{1}{2}a(q)(\overset{\circ}{q})^2, \quad U = U(q),$$

и в точке $q = 0$ имеем $U(0) = U'(0) = 0,\ U''(0) > 0$. Период $\tau$ колебаний вблизи положения равновесия $q = 0$ стремится при уменьшении амплитуды колебаний к пределу $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$, где $\omega_0^2 = b/a$,

$$b = \frac{\partial^2 U}{\partial q^2}|_{q=0}, \quad a = a(0).$$

Положим $p = \varepsilon P,\ q = \varepsilon Q$. Тогда

$$\frac{d}{dt}(a(0)\ \overset{\circ}{P}) = -U''(0)P + O(\varepsilon).$$

Перейдем к линеаризованной системе $T_2 = a(0)\ \overset{\circ}{P}^{2}\ /2,\ U_2 = bP^2/2$. Решение уравнение Лагранжа $\overset{\circ\circ}{q} = -\omega_0^2 q$ имеет период $\tau_0 = 2\pi/\omega_0$:

$$q = c_1 \cos\omega_0 t + c_2 \sin\omega_0 t$$

для любой начальной амплитуды.

Определение 0.10: Периодическое движение (61) называется собствееным колебанием системы (62), а число $\omega$ называется собственной частотой.

(Собственные колебания и частоты называют также главными или нормальными. Неположительные $\lambda$ также соответствуют собственные векторы: соответствующие движения для краткости также называют "собственными колебаниями", хотя они и не периодичны: соответствуюшие "собственные частоты"мнимые.

**Задача.** Доказать, что число линейно независимых настоящих собственных колебаний равно положительному индексу инерции потенциальной энергии $(Bq, q)/2$.
Теперь результат можно сформулировать так:

Теорема 0.34: Система (62) имеет $n$ собственных колебаний, направления которых попарно ортогональны в сысле скалярного произведения, заданного энергией $T$.

Система координат $Q$ ортогональна в сысле скалярного произведения $(Aq, q)$.

**Разложение по собственным колебаниям.** Из доказанной теоремы вытекает

Заключение 0.7: Всякое малое колебание есть сумма собственных колебаний (принцип Гюйгенса).

Сумма собственных колебаний, вообще говоря, не периодична(вспомним фигуры Лиссажу). Для разложения движения в сумму собственных колебаний достаточно спроектировать начальные условия $q, \overset{\circ}{q}$ на собственные направления $\xi$ и рещить соответствующие одномерные задачи.

Итак, уравнение Лагранжа для системы

$$T = \frac{1}{2}(A \overset{\circ}{q}, \overset{\circ}{q}), \quad U = \frac{1}{2}(Bq, q), \quad q \in R^n, \quad \overset{\circ}{q} \in R^n. \tag{62}$$

можно решить следующим образом. Вначале ищем собственные колебания вида $\mathbf{q} = i^{i\omega t}\xi$. Подставив ув уравнение, получим

$$\frac{d}{dt}A \overset{\circ}{\mathbf{q}} = B\mathbf{q}$$

$$(B - \omega^2 A)\xi = 0$$

Из характеристического уравнения

$$\det |B - \lambda A| = 0, \tag{63}$$

находим $n$ собственных чисел $\lambda = \omega_k^2$. Им соответствуют $n$ попарно ортогональных векторов $\xi_k$. Общее решение в случае $\lambda \neq 0$ имеет вид

$$\mathbf{q}(t) = \mathrm{Re} \sum_{k=1}^{n} C_k e^{i\omega_k t} \xi_k$$

(овеществление). **Этот результат справедлив и тогда, когда среди собственных чисел $\lambda$ есть кратные–нет присоединенных векторов, которые приводят к полиномиальному росту амплитуды.** Таким образом, в лагранжевой системе, в отличии от общей системы линейных дифф. уравнений, резонансные члены вида $t \sin \omega t$ и т.п. не возникают даже в случае кратных собственных чисел.

## Лекция 12 Параметрический резонанс.

Если параметры системы периодически меняются со временем, то положение равновесия может сделаться неустойчивым, даже если оно и усиойчиво при каждом фиусированном значении параметра. Благодаря такой неустойчивости можно раскачиваться на качелях. Приведем примеры динамических систем, параметры котрых меняются со временем периодически.

**Примеры**

I. Качели, у которых длина эквивалентного математического маятника $l(t)$ меняется со временем периодически: $l(t + T) = l(t)$(рис.)

II. Маятник в поле с периодически меняющейся силой тяжести(например Луна) описывается уравнением Хилла

$$\overset{\circ\circ}{q} = -\omega^2(t)q, \quad \omega(t + T) = \omega(t). \tag{64}$$

III. Маятник с периодически вертикально колеблющейся точкой подвеса также описывается уравнением (72).

Для системы с периодически меняющимися параметрами правые части уравнений движения–периодические функции $t$. Уравнения движения можно записать в виде системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\overset{\circ}{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(x, t), \quad \mathbf{f}(x, t + T) = \mathbf{f}(x, t), \quad x \in R^n, \tag{65}$$

с периодически меняющимися правыми частями. Например, уравнение (72) можно записать в виде

$$\overset{\circ}{x}_1 = x_2, \qquad (66)$$
$$\overset{\circ}{x}_2 = -\omega^2 x_2, \quad \omega(t+T) = \omega(t)$$

**Отображение за период( отображение монодромии).** Выше мы ввели отображени $g^t\ :\ \ R^n\ \to\ \ R^n$ , переводящее $x_0 \in R^n$ в значение в момент $t\ :\ \ g^t x_0 = \varphi(t)$ решение $\varphi$ системы (65) с начальными условиями $\varphi(0) = x_0$.(рис.) Отображение $g^t$ не образует, вообще говоря, группу: $g^{t+s} \neq g^t\ g^s \neq\ g^s\ g^t$(рассмотреть $x' = A(t)x$. Тогда $x(t) = K(t)e^{tB}x_0$ и $K(t+s) \neq K(t)K(s) \neq K(s)K(t)$). Очевидно, что $\{g^t\}$–группа, тогда и только тогда, когда правая часть $f(x,t)$ в (65) **автономна**, т.е. не зависит от $t$. Отображение $\{g^T\}$ называют отображением за период. Обозначим через

$$A:\ R^n \to R^n, \quad Ax(0) = x(T).$$

**Пример.** Для систем

$$\overset{\circ}{x}_1 = x_2, \quad \overset{\circ}{x}_2 = -x_2$$
$$\overset{\circ}{x}_1 = x_1, \quad \overset{\circ}{x}_2 = -x_2$$

которые можно считать периодическими с любым периодом $T$, отображение $A$ есть поворот и гиперболический поворот (рис. по окружн. и по гиперболе)

Теорема 0.35: 1) Точка $x_0$ есть неподвижная точка отобрражения $A,\ Ax_0 = x_0$, тогда и только тогда, когда решение с начальным условием $x(0) = x_0$ периодическое с периодом $T$.
2) Периодическое решение $x(t)$ устойчиво по Ляпунову(асимпт. устойч) тогда и только тогда, когда неподвижная точка $x_0$ отображения $A$ устойчиво по Ляпунову(асимпт. устойч.) если $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$, так что из $|x - x_0| < \delta$ вытекает $|A^n x - A^n x_0| < \varepsilon$ для всех $0 < n < \infty$ сразу (сответственно $A^n x - A^n x_0 \to 0$ при $n \to \infty$.)
3) Если система (65) линейна, т.е. $\mathbf{f}(x,t) = \mathbf{f}(t)x$-линейная функция $x$, то отображение $A$ линейно.
4) Если система (65) гамильтонова, то отбражение $A$ сохраняет объем $\det A = 1$.

**Доказательство.** Утверждения 1), 2) вытекают из соотношения $g^{T+s} = g^s A$. Утверждение 3) вытекает из того, что сумма решений линейной системы есть снова решение. Утверждение 4) вытекает из теремы Лиувилля.

Применим доказанную теорему к отображению $A$ фазовой плоскости $\{(x_1,x_2)\}$ на себя, соотствующему уравнениею (72) и системе (66). Так как система (66) линейна и гамильтонова, $H = (x_1^2 + \omega^2 x_2^2)/2$, получаем следствие

Следствие 0.6: Отображение за период системы (66) линейно и сохраняет площадь($\det A = 1$). Для устойчивости нулевого решения уравнения (72) необходимо и достаточно устойчивость отображения за период.

**Задача.** Доказать, что поворот плоскости–устойчивое отображение, а гиперболический поворот–неустойчив.

**Линейные отображения плоскости на себя, сохраняющие площадь.**

Теорема 0.36: Пусть $A-$ матрица сохраняющего площадь линейного отображения плоскости на себя ($\det A = 1$). Тогда отображение $A$ устойчиво, если $|\mathbf{tr}A| < 2$, и неустойчиво, если $|\mathbf{tr}A| > 2$ ($\mathbf{tr} = a_{11} + a_{22}$–след матрицы).

**Доказательство.** Пусть $\lambda_1, \lambda_2$ собственные числа $A$. Они удовлетворяют характеристическому уравнению $\lambda^2 - \mathbf{tr}A\lambda + 1 = 0$ с вещественными коэфициентами ($\lambda_1 + \lambda_2 = \mathbf{tr}A,\ \lambda_1\lambda_2 = 1$). Корни этого уравнения вещественны, если $|\mathbf{tr}A| > 2$ и комплесно-сопряженные при $|\mathbf{tr}A| < 2$.
В первом случае одно из собственных значений больше 1, второе меньше 1 по модулю, т.е. $A$ есть гиперболический поворот, который неустойчив.
Во втором случае собственные числа лежат на единичной окружности

$$1 = \lambda_1\lambda_2 = \lambda_1\overline{\lambda_1} = |\lambda_1|^2$$

Отображение $A$ эквивалентно повороту на угол $\alpha$(где $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\alpha}$), т.е. приводится к повороту соответствующим выбором координат на плоскости
(КАК?????). Поэтому оно устойчиво по Ляпунову.
Таким образом, весь вопрос об устойчивости нулевого решения уравнения (72) свелся к вычислению следа матрица $A$. К сожалению вычислить это сдед явно удается лишь в специальных случаях. Его всегда можно найти приближенно, численно тнтегрируя на отрезке $0 \le t \le T$. В важном случае, когда $\omega(t)$ близко к постоянной, помогают простые общие соображения.

**Сильная устойчивость.**

Определение 0.11: Нулевое решение гамильтоновой линейной системы **сильно устойчиво,** если оно устойчиво и у всякой достаточно близкой линейной гамильтоновой системы нелевое решение тоже устойчиво. Расстоянгие между линейными системами с периодическими коэффициентами $\overset{\circ}{x}= B_1(t)x,\ \overset{\circ}{x}= B_2(t)x$ определяется как максимум расстояния между операторами $B_1(t)$ и $B_2(t)$ по $t$.

Из предыдущих двух теорем вытекает

Заключение 0.8: Если $|\mathbf{tr}A| < 2$, то нулевое решение сильно устойчиво.

Ибо если $|\mathbf{tr}A| < 2$ то это условие сохраняется при малом возмущении. Применим этот факт к системе с почти постоянными(мало меняющимися) коэффициентами. Например

$$\overset{\circ\circ}{x}= -\omega^2(1 + \varepsilon a(t))x, \quad \varepsilon \ll 1, \tag{67}$$

где $a(t + 2\pi) = a(t)$, например $a(t) = \cos t$. Маятник, частота которого колеблется около $\omega$ с малой амплитудой и с периодом $2\pi$.(Когда $a(t) = \cos t$ это уравнение называется **уравнением Матье**.) Каждую систему (67) будем изображать точкой наплоскости параметров $\varepsilon, \omega > 0$. Очевидно, устойчивые системы с $|\mathbf{tr}A| < 2$ образуют на плоскости $\varepsilon, \omega$ открытое множество, так же как и неустойчивые системы $|\mathbf{tr}A| > 2$(рис. зон параметрического резонанса.) Граница устойчивости дается уравнением $|\mathbf{tr}A| = 2$.

Теорема 0.37: Все точки оси $\omega$, исключая целые и полуцелые точки $\omega = k/2,\ k = 0, 1, 2, \dots$, соответствуют сильно устойчивым системам (67).

Таким образом, множество неустойчивых систем может подходить к оси $\omega$ только в точках $\omega = k/2$. Иными словами, раскачать качели малым периодическим изменением длины можно лишь в том случае, когда один период изменения длины близок к целому числу полупериодов собственных колебаний–результат известный из эксперимента. **Доказательство** сформулированной теоремы основан на том, что при $\varepsilon = 0$ уравнение (67) имеет **постоянные крэффициенты и явно решается.**
**Задача.** Вычислить для системы (67) с $\varepsilon = 0$ матрицу преобразования $A$ за период $T = 2\pi$ в базисе $x, \overset{\circ}{x}$.
Общее решение $x = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t$. Частное решение с начальными данными $x(0) = 1, \overset{\circ}{x}\ (0) = 0\ :\ \ x = \cos\omega t,\ \overset{\circ}{x} = -\omega\sin\omega t$. Частное решение с начальными данными $x(0) = 0, \overset{\circ}{x}\ (0) = 1\ :\ \ x = \sin\omega t/\omega,\ \overset{\circ}{x} = \cos\omega t$. (движение базиса, как касательных векторов к этим двум траекториям). Ответ

$$A = \begin{vmatrix} \cos 2\pi\omega & \frac{1}{\omega}\sin 2\pi\omega \\ -\omega\sin 2\pi\omega & \cos 2\pi\omega \end{vmatrix}$$

Поэтому

$$|\mathbf{tr}A = |2\cos 2\pi\omega| < 2$$

если $\omega \neq k/2,\ k = 0, 1, \dots$, и теорема вытекает из следствия (0.8). Более внимательный анализ( который мы приведем для задачи ниже) показывает, что вообще говоря( и при $a(t) = \cos t$) вблизи точек $\omega = k/2$ область неустойчивости (заштрихованная на рис.) действительно подходит к оси $\omega$. Такимобразом, при $\omega \approx k/2,\ k = 1, 2, \dots$, нижнее положение равновесия идеализированных качелей (67) неустойчиво и они раскачиваются при сколь угодно малом периодическом изменении длины. Это явление называется **параметрическим резонансом.** Характерной особенностью параметрического резонанса является то, что он сильнее всего проявляется в случае, когда частота изменения параметра $\nu$( в уравнении (67) $\nu = 1$) вдвое больше собственной частоты.
**Замечание.** Теоретически параметрический резонанс наблюдается при бесконечном наборе соотношений $\omega/\nu \approx k/2,\ k = 1, 2, \dots$, Практически наблюдаемы обычно лишь случаи, когда $k$ невелико($k = 1, 3$, реже 3). Дело в том, что

а) При больших $k$ область неустойчивости подходит к оси $\omega$ узким языком и для резонансной частоты $\omega$ получаются очень жесткие пределы($\sim \varepsilon^k$ для $a(t) = \cos t$; если $a-$ тригонометрический полином степени $d$, то $\sim \varepsilon^m$, где $m = -[k/d]$ наименьшее целое число, не меньшее $k/d$; если $a-$ в (67) аналитическая функция общего положения, то ширина $k$-й резонансной порядка $\varepsilon\theta^k$, где $|\theta| < 1$.(см. например, Арнольд В.И. Замечания о теории возмущений для задач типа матье//УМН 1983, Т.38, N 4, стр.89-203.

б) Сама неустойчивость слабо выражена при больших $k$, так как $|\mathbf{tr}A| - 2$ невелик и собственные числа близки к единице при больших $k$.

в) Сколь угодно малое трение приводит к тому, что для возникновения параметрического резонанса имеется минимальное значение амплитуды $\varepsilon_k$(при меньших $\varepsilon$ колебания затухают). С ростом $k$ быстро $\varepsilon_k$ растет (рис100).

Заметим также, что для уравнения (67) в неустойчивом случае величина $x$ растет неограниченно.

В реальных системах колебания достигают лишь конечной амплитуды, так как при больших $x$ само линеаризованное уравнение (67) теряет силу и нужно учитывать нелинейные эффекты.

**Эффект перекачки энергии.** Рассмотрим систему из двух одинаковых математических маятников длины $l+1=l_2=1$ массы $m_1=m_2=1$ в поле силы тяготения с $g=1$. Пуст маятники соединены невесомой пружиной, длина которой равна расстоянию между точками подвеса. Обозначим через $q_1, q_1$ углы отклонения маятников. Тогда для малых колебаний

$$T=\frac{1}{2}(\overset{\circ}{q}{}_1^2+\overset{\circ}{q}{}_2^2),\quad U=\frac{1}{2}(q_1^2+q_2^2+\alpha(q_1-q_2)^2$$

где $(q_1-q_2)^2/2$ потенциальная энергия упругости пружины, связывающей маятники. Положим

$$Q_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(q_1+q_2),\quad Q_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(q_1-q_2)$$

Тогда

$$q_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1+Q_2),\quad q_2=\frac{1}{\sqrt{2}}(Q_1-Q_2)$$

и обе формы приведены к главным осям

$$T=\frac{1}{2}(\overset{\circ}{Q}{}_1^2+\overset{\circ}{Q}{}_1^2),\quad U=\frac{1}{2}(\omega_1^2Q_1^2+\omega_2^2Q_2^2),$$

где $\omega_1=1,\ \omega_2=\sqrt{1+2\alpha}$. Итак, два собственных колебания следующие

1) $Q_2=0\Rightarrow\ q_1=q_2$ : оба маятника движутся синфазно с прежней частотой 1; пружина не работает,

2) $Q_1=0\Rightarrow\ q_1=-q_2$ : маятники движутся в противофазе с увеличившейся благодаря действию пружины прежней частотой $\omega_2>1$; пружина не работает.

**Задачи.**

1. Нарисовать орбиту в конфигурационном пространгстве $q_1,q_2$ с потенциальной энергией $2U=1$(эллипс с одиничной полуосью вдоль $Q_1$ и полуосью $1/\sqrt{1+2\alpha}<1$ вдоль $Q_2$.

2. Пусть пружина очень слаба: $\alpha=\varepsilon\ll 1$. Тогда появляется интересный эффект **перекачки энергии.** Пусть в начальный момент маятники покоятся, и одному из них сообщена скорость $\overset{\circ}{q}_1=v$. Показать, что через некоторое время $T$ первый маятник будет почти неподвижен, а вся энергия перейдет второму. Из начальных условий следует $Q_1(0)=Q_2(0)=0$. Поэтому

$$Q_1=c_1\sin t,\quad Q_2=c_2\sin\omega t,\quad \omega_2=\sqrt{1+2\varepsilon}\approx\ 1+\varepsilon(\varepsilon\ll 1).$$

Но $\overset{\circ}{Q}_1\ (0) = \overset{\circ}{Q}_2\ (0) = v/\sqrt{2}$. Поэтому $c_1 = v/\sqrt{2},\ c_2 = v/(\omega_2\sqrt{2})$, и наше решение имеет вид

$$q_1 = \frac{1}{2}v(\sin t + \frac{1}{\omega_2}\sin\omega_2 t),\quad q_2 = \frac{1}{2}v(\sin t - \frac{1}{\omega_2}\sin\omega_2 t),$$

или (пренебрегая слагаемым $v(1-1/\omega_2)\sin\omega_2 t$, малым вместе с $\varepsilon$ поскольку $1-1/\omega_2 = 1/\sqrt{1+2\varepsilon} \approx\ \varepsilon$) получим

$$q_1 = \frac{1}{2}v(\sin t + \frac{1}{\omega_2}\sin\omega t) \approx\ \frac{1}{2}v(\sin t + \sin\omega t) = v\sin(\frac{1+\omega_2}{2}t)\cos(\frac{1-\omega_2}{2}t)$$

$$= v\cos(\frac{1}{2}\varepsilon t)\sin\omega' t,\quad \omega' = \frac{1+\omega_2}{2};$$

где

$$\frac{1}{2}(\omega_2 - 1) \approx\ \frac{1}{2}\varepsilon,\quad \omega' = \frac{1}{2}(\omega+1) \approx\ 1.$$

Также получим

$$q_2 \approx\ \frac{1}{2}v(\sin t - \frac{1}{\omega_2}\sin\omega_2 t) = -v\cos\omega' t\sin(\frac{1}{2}\varepsilon t),$$

Величина $\frac{1}{2}\varepsilon$ мала, поэтому $q_1$ испытывает колебания частоты $\omega' \approx\ 1$ с медленно меняющейся амплитудой $v\cos(\frac{1}{2}\varepsilon t)$. Через $T = \pi/\varepsilon$ будет колебаться практически один второй маятник, через $2T$-опять один первый и т.д.(биения)

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ.

## Лекция 13. Регулярная асимптотика.

Исследуем регулярную асимптотику.

Теорема 0.38: Пусть при $(t,x) \in D,\ \mu \in M$, ($D$-область в $R^{n+1}$, $M-$ интервал в $R^1$) все функции $f_j,\ \partial f_j/\partial x_k,\ \partial f_j/\partial\mu,\ a'(\mu)$ непрерывны. Пусть при всех $\mu \in M$ на отрезке $I = [t_1, t_2],\ t_0 \in I$ решение $x(t,\mu)$ задачи

$$x' = f(t,x,\mu),\quad x(t_0) = a(\mu),\quad x = (x_1,\ldots,x_n),\ f = (f_1,\ldots,f_n) \tag{68}$$

существует и проходит в области $D$. Тогда это решение имеет производные $\partial x_j/\partial\mu$, непрерывные по $(t,\mu)$. Функции $u_i = \partial x_i/\partial\mu,\ i = 1,\ldots,n$, удовлетворяют системе уравнений в вариациях

$$\frac{du_j}{dt} = \sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_k}\ u_k + \frac{\partial f_j}{\partial\mu},\quad u_j(t_0) = a_j'(\mu),\quad j = 1,\ldots,n \tag{69}$$

Если решение $x(t,\mu)$ известно хотя бы при одном значении $\mu$, то система (69) позволяет найти $\partial x/\partial\mu$ при этом $\mu$. Систему в вариациях можно не запоминать, она получается посредством дифференцировнием обеих частей системы (68) по $\mu$, при этом считаем, что $x = x(t\mu)$ и $\partial x_i/\partial\mu$ обозначаем $u_i$.

**Пример.** Найти $\partial x/\partial\mu$ при $\mu = 0$ от решения задачи

$$x' = x^2 + 4\mu t + \mu^2, \quad x(1) = 2\mu - 1.$$

Выполнены условия теоремы (0.38). Дифференцируя по $\mu$ и положив $x'_\mu = u$ получим

$$\frac{du}{dt} = 2x(t)u + 4t + 2\mu, \quad u(1) = 2$$

где $x(t)$ решение системы при $\mu = 0$, т.е.

$$x' = x^2, \quad x(1) = -1 \quad \Rightarrow \quad x = -1/t$$

Отсюда

$$\frac{du}{dt} = -2\frac{1}{t}u + 4t, \quad u(1) = 2$$

т.е. $u = t^2 + ct^{-2}$. Из начального условия находим $c = 1$. Итак $u = t^2 + t^{-2}$

Теорема 0.39: Пусть выполнены условия теоремы (0.38) и, кроме того функции $f_i, a_i(\mu)$, имеют непрерывные производные по $x, \mu$ до порядка $m \geq 2$ включительно, в том числе смешанные производные. Тогда решение $x(t, \mu)$ имеет непрерывные по $t, \mu$ производные по $\mu$ до порядка $m$ включительно.

Следствие 0.7: Пусть при $(t, x) \in D, \ |\mu| < \mu_1$ выполнены условия теоремы (0.39), и при $\mu = 0, \ t_1 \leq t \leq t_2$ решение задачи (0.40) при $t_1 \leq t \leq t_2$ разлагается по формуле Тейлора по степеням параметра $\mu$ до $\mu^m$ включительно

$$x(t, \mu) = v_0(t) + \mu v_1(t) = \mu^2 v_2(t) + \cdots + \mu^m v_m(t) + o(\mu^m). \tag{70}$$

Здесь $x(t, \mu)$ и $v_i(t)$-$n$ мерные вектор функцииб $v_0(t) \equiv x(t, 0)$ есть решение системы (0.40) при $\mu = 0$. Оно считается известным. Чтобы найти $v_1(t), \ldots, v_m(t)$ надо подставить разложение (70) в систему (0.40) и начальные условия, и разложить правые части по степеням $\mu$ до $\mu^m$ включительно. Далее надо приравнять коэффициенты при одинаковых степенях $\mu$. Получается для $v_1, \ldots, v_m$ система дифференциальных уравнений с начальными условиями. Последовательно решая уравнения системы и пользуясь начальными условиями, находим $v_1, \ldots, v_m$.

**Пример.** Найти разложение решения задачи

$$\frac{dx}{dt} = \frac{t}{x} - 2\mu t^2, \quad x(1) = 1 - \frac{1}{2}\mu\frac{1}{8}\mu^2$$

по степеням параметра $\mu$ до $\mu^2$ включительно. Правая часть уравнения в области $x > 0$ имеет производные любого порядка по $x, \mu$. Условие теоремы (0.39) выполнены для любого $m$, пока решение задачи с $\mu = 0$ проходит в области $x > 0$. При $\mu = 0$ эта задача принимает вид $dx/dt = t/x, \ x(1) = 1$, и имеет решение $x(t) = t$, оно проходит в область $x > 0$ при $t > 0$. Поэтому $v_0(t) = t, \ t > 0$. Разложение $x = t+ = muv_1 + \mu^2 v_2 + o(\mu^2)$ подставляем в уравнение и начальные условия (члены порядка $o(\mu^2)$ не пишем).

$$1 + \mu v_1' + \mu^2 v_2' + \cdots = \frac{t}{(t + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + \ldots)} - 2\mu t^2, \tag{71}$$

$$1 + \mu v_1' + \mu^2 v_2' + \cdots = 1 - \frac{1}{2}\mu - \frac{1}{8}\mu^2$$

Разлагая дробь в (71) и приравнивая коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях параметра $\mu$ :

при $\mu$: $v_1' = -\frac{v_1}{t} - 2t^2, \quad v_1(t) = -\frac{1}{2}$;

при $\mu^2$ : $v_2' = -\frac{v_2}{t} + \frac{v_1^2}{t^2}, \quad v_2(1) = \frac{1}{8}$

Все дифференциальные уравнения для $v_1, \ldots, v_m$ всегда линейны. Отсюда $v_1 = -t^3/2$, потом находим $v_2 = 1/(12t) + t^5/24$. Итак

$$x(t) = t - \mu\frac{t^3}{2} + \mu^2(\frac{1}{12t} + \frac{t^5}{24} + o(\mu^2).$$

Так как условия теоремы (0.39) выполнены для любого $m \geq 2$, то следующий член разложения имеет вид $\mu^3 v_3(t)$ и не находя $v_3$ вместо $o(\mu^2)$ можно написать $O(\mu^2)$.

**Отыскание периодического решения.** Приведенные ниже результаты дают условия существования периодических решений длялинейных систем с периодической правой частью и для нелинейной системы, близкой к линейной.

Лемма 0.11: Пусть при $0 \leq t \leq p$ вектор-функция $x(t)-$ решение уравнения $x' = f(t,x)$, где вектор-функция $f$ и ее производные $\partial f_i/\partial x_j$ непрерывны и $f(t+p,x) \equiv f(t,x)$. Если $x(p) = x(0)$, то решение $x(t)$ продолжается на интервал $(-\infty, \infty)$ с периодом $p$.

Так как

$$x'_{\text{лев}}(p) = f(p, x(p)) = f(0, x(0)) = x'_{\text{прав}}(p)$$

то продолженная с периодом $p$ функция $x(t) \in C^1$. Она всюду удовлетворяет данному уравнению, ибо для любого $k \in \mathbf{Z}$ имеем

$$x'(t+kp) = x'(t) = f(t, x(t)) = f(t+kp, x(t+kp))$$

Лемма 0.12: Если для всех собственных значений матрицы $A$ имеем

$$\lambda \neq \frac{2\pi k}{p} i, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \tag{72}$$

то система $x' = Ax + f(t)$ для каждой непрерывной функции $f(t)$ с периодом $p$ имеет(и только одно) решение с периодом $p$. Условие (72) называется условием **отсутствия резонанса.**

**Доказательство.** Пусть $v(t)$ частное решение данной системы с $v(0) = 0$. Общее решение имет вид $x = e^{tA}b + v(t)$, где $b$ произвольный вектор из $R^n$. Чтобы это решение имело период $p$ по лемме (0.11) надо чтобы $x(p) = x(0)$, т.е.

$$e^{pA}b + v(p) = b + v(0) = b \Rightarrow \quad (e^{pA} - E)b = -v(p)$$

Это линейная алгебраическая система относительно вектора $b$. Для существования единственного решения достаточно, чтобы

$$\det(e^{pA} - E) \neq 0$$

т.е. чтобы матрица $e^{pA}$ не имела собственных значений, равных 1. Если $\lambda_1, \dots, \lambda_n$-собственные значения $A$, то как мы показали в лекции 11 матрица $e^{pA}$ имеет собственные значения $e^{p\lambda_j}, \ j = 1, \dots, n$. Для $\lambda = \alpha + \beta i$ имеем $e^{p\lambda} = e^{p\alpha}(\cos p\beta + i \sin p\beta)$. Это число равно 1 только, если $\alpha = 0, \ p\beta = 2\pi k, \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Отсюда при условии (72) имеем $e^{p\lambda} \neq 1$.

**Пример.** Рассмотрим уравнение $x' = x + \sin t$. Оно имеет единственное $2\pi$ периодическое решение $x(t) = e^t b + e^t \int_0^t e^{-s} \sin s ds$. Действительно, сделав замену $s = \mu + 2\pi$ получим

$$x(t + 2\pi) = e^{2\pi} e^t b + e^{2\pi} e^t \int_0^{t+2\pi} e^{-s} \sin s ds =$$

$$= e^t \int_0^t e^{-\mu} \sin \mu \ d\mu + e^t (e^{2\pi} b + \int_{-2\pi}^0 e^{-\mu} \sin \mu \ d\mu) \equiv x(t)$$

если $e^{2\pi} b + \int_{-2\pi}^0 e^{-\mu} \sin \mu \ d\mu = 0$, что однозначно определяет

$$b = -e^{-2\pi} \int_{-2\pi}^0 e^{-\mu} \sin \mu \ d\mu.$$

Существование такого решения подтверждает результат леммый, поскольку здесь $\lambda = 1 \neq ki, \ k = 0, \pm 1, \dots$.

Теорема 0.40: Пусть функции $f(t), \ g(t, x, \mu)$ непрерывны при $x \in R^n, \ (t, x) \in D, \ |\mu| < \mu_1$, имеют период $p$ по $t$; $g \in C^m$ по $x, \mu, \ m \geq 1$. Пусть выполнено условие (72) и решение $x^0(t)$ с периодом $p$ уравнения $x' = Ax + f(t)$ содержится в области $D/$ Тогда при всех достаточно малых $|\mu|$ система

$$x' = Ax + f(t) + \mu \, g(t, x, \mu) \tag{73}$$

имеет решение периода $p$ по $t$, стремящееся к $x^0(t)$ при $\mu \to 0$. Такое решение единственно и принадлежит классу $c^m$ по $\mu$.

**Доказательство теоремы (0.40).** Пусть $x(t; b, \mu)$ решение системы с начальным условием $x(0; b, \mu) = b$. По лемме (0.11) оно будет иметь период $p$, если

$$x(p; b, \mu) - b = 0 \tag{74}$$

Докажем, что при малых $\mu$ существует $b \in R^n$, удовлетворяющее уравнению (74). Функция $x(p; b, \mu) \in C^m$ по $b, \mu$ в силу теоремы (0.39) При $\mu = 0$ уравнение (73) линейно, как в лемме (0.12), Уравнение (74) принимет вид

$$(e^{pA} - E)b = -v(p), \quad \det(e^{pA} - E) \neq 0$$

и имеет единственное решение $b$. Далее, якобиан левой части равенства (74) по координатам $b_1, \dots, b_n$ вектора $b$ при $\mu = 0$ совпадает с детерминантом $\det(e^{pA} - E)$, значит, не равен нулю. Тогда по теореме о неявной функции уравнение (74) при достаточно малых $\mu$ имеет решение $b = b(\mu)$, стремящееся к $b^0$ при $\mu \to 0$, такое решение единственно и $b(\mu) \in C^m$. Ттгда решение $x(t; b(\mu), \mu) \in C^m$ по $\mu$ и в силу (74) и леммы (0.11) имеет период $p$.

Следствие 0.8: При условиях теоремы (0.40) названное периодическое решение имеет разложение по степени $\mu$ вида (70) с функциями $v_j(t)$, имеющими период $p$.

Решение $x(t; b(\mu), \mu) \in C^m$ по $\mu$, поэтому имеет разложение вида (70). Следовательно,

$$x(t+p; b(\mu), \mu) - x(t; b(\mu), \mu) = d_0 + d_1\mu + \dots + d_m\mu^m + o(\mu^m),$$

где $d_i = v_i(t+p) - v_i(t),\ i = 0, 1, \dots, m$. В силу периодичности решения левая часть этого равенства равна нулю, поэтому $d_i = 0$, т.е.

$$v_i(t+p) \equiv v_i(t).$$

Замечание 0.1: Пусть дано уравнение

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_n y = f(t) + \mu g(t, y, \mu)$$

с постоянными коэффициентами $a_i$ и непрерывными функциями $f, g$ периода $p$ по $t$; $g \in C^m$ по $y, \mu$, а корни $\lambda$ характеристического уравнения удовлетворяют условия (72) отсутствия резонанса. Тогда для отыскания решения периода $p$ не нужно переходить от уравнения к системе, можно сразу отыскать решения в виде (70), где $v_i(t)$- скалярные функции периода $p$.

**Пример.** Найти с точностью $o(\mu^2)$ периодическое решение уравнения

$$x'' + 3x = 2\sin t + \mu x^2$$

Здесь $p = 2\pi$, характеристическое уравнение $\lambda^2 + 3 = 0 \Rightarrow \ \lambda = \pm i\sqrt{3} \neq 2\pi k i/p = ki\ (k \in \mathbf{Z})$, т.е. условие отсутствия резонанса выполнено. Ишем регулярную асимптотику решения $x = v_0 + \mu v_1 + \dots$. Подставляя в уравнение иприравнивая коэффициенты при одинаковых степенях $\mu$, получим систему уравнений

$$v_0'' + 3v_0 = 2\sin t, \quad v_1'' + 3v_1 = v_0^2, \quad v_2'' + 3v_2 = 2v_0v_1, \quad \dots$$

Надо найти $v_0, v_1, v_2$ с периодом $2\pi$. Для каждого из этих уравнееий надо найти только частное решение, так как по теореме (0.40) решение с периодом $2\pi$ единственно. Отсюда $v_0 = \sin t,\ v_1'' + 3v_1 = \sin^2 t = 1/2 - 1/2\cos 2t$, т.е. $v_1 = 1/6 + 1/2\cos 2t$. Тогда

$$v_2'' + 3v_2 = 2\sin t(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cos 2t) = -\frac{1}{6}\sin t + \frac{1}{2}\sin 3t,$$

отсюда $v_2 = -\frac{1}{12}\sin t - \frac{1}{12}\sin 3t$

$$x = \sin t + \mu(\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\cos 2t) + \mu^2(-\frac{1}{12}\sin t - \frac{1}{12}\sin 3t) + o(\mu^2)$$

К рассмотренной задаче сводится задача о вынужденных колебаниях автономной системы вблизи положения равновесия, вызываемых периодическим малым внешним воздействием. Рассмотрим систему

$$x' = F(x) + \mu f(t), \ f(t+p) \equiv f(t), \quad x = (x_1, \ldots, x_n)^\top$$

Пусть $x^0$ положение равновесия при $\mu = 0$, т.е. $F(x^0) = 0$; $\mu-$ малое число, функция $f(t)-$ непрерывна, $f \in C^{m+1}$, $m \geq 1$, в окрестности точки $x^0$. Замена $x = x^0 + \mu y$ дает

$$\mu y' = F(x^0 + \mu y) + \mu f(t) = \mu(f(t) + Ay) + r(\mu, y))$$

где $F(x^0 + \mu y) = \mu A + \mu r(\mu, y)$, $A = (\frac{\partial F_i(x^0)}{\partial x_j^0})_{ij=1,\ldots,n}$. Остаточный чден $r(\mu, y) \in C^{m+1}$, ибо другие члены в равенстве принадлежат $C^{m+1}$, $r = \mu^2 g(\mu, y)$, $g \in C^m$. Тогда

$$y' = Ay + f(t) + \mu g(y, \mu)$$

Если нет резонанса, для малых $|\mu|$ есть единственное решение с периодом $p$.

## Лекция 14. Усреднение возмущений

**Системы, близкие к интегрируемым.** Мы рассмотрели выше довольно много интегрируемых систем(одномерные задачи, задачи двух тел, малые колебания). Мы изучали характер фазовых траектрий в этих системах: они оказались "обмотками"торов, заполняющих всюду плотно инвариантные торы в фазовом пространстве. В последнекй лекции мы докажем, что каждая траектория распределена на этом торе равномерно.
Не следует думать, что такая ситуация типична для задач общего вида. В действительности, свойства траекторий в многомерных системах могут быть весьма разнообразными и совсем не похожими на свойства условно-периодических движений. В частности, замыкание траектории системы с $n$ степенями свободы может заполнять в $2n-$ мерном фазовом пространстве сложные множества размерности больше $n$; траектория может даже быть всюду плотной и равномерно распределенной на всем $(2n-1)$ мерном многообразии, заданном уравнением $H = h$. Один из подходов к неинтегрируемым системам–изучение систем, близких к интегрируемым. Например, задача о движении планет вокруг Солнца близка к интегрируемой задаче о движении невзаимодействующих точек вокруг неподвижного центра, задача о нелинейных колебаниях вблизи положения равновесия(близкая интегрируемая задача-линейная). При исследовании этих и подобных задач чрезвычайно плодотворен метод усреднения.
**Принцип усреднения.** Рассмотрим простейший вид гамильтоновой системы в так называемых переменных действие-угол, в которых система интегрируема. Возмоность построения таких переменых мы обсудим в последних декциях. Итак, пусть $I, \varphi-$ переменные действия-угол в интегрируемой ("невозмущенной") системы с функцией Гамильтона $H_0(I)$:

$$\overset{\circ}{I} = 0, \quad \overset{\circ}{\varphi} = \omega(I) = \frac{\partial H_0}{\partial I}$$

в которой движение условно периодичное, т.е.

$$I = \text{const}, \quad \varphi(t) = \varphi(0) + \omega(I)t,$$

траектории в этом случае "обмотками"торов $T^n$, заполняющих всюду плотно инвариантные торы в фазовом пространстве). Здесь $I-$ первые интегралы.

В качестве близкой "возмущенной"системы рассмотрим систему

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\varphi} &= \omega(I) + \varepsilon \mathbf{f}(I,\varphi) \\ \overset{\circ}{I} &= \qquad\quad \varepsilon \mathbf{g}(I,\varphi) \end{aligned} \tag{75}$$

где $\varepsilon \ll 1$. Забудем временно о гамильтоновости системы и рассмотрим произвольную систему ДУ (75), заданную на прямом произведении $T^k \times G$ $k-$ мерного тора $T^k = \{\varphi = (\varphi_1,\ldots,\varphi_k)\ (\mathbf{modd} 2\pi)\}$ и область $G \subset \mathbf{R}^l = \{I = (I_1,\ldots,I_l)\}$ $l-$ мерного пространства . При $\varepsilon = 0$ движение (75) условно -периодическое, с $k-$ мерными инвариантными торами.

**Принцип усреднения** для системы (75) состоит в ее замене другой системой, называемой усредненной системой

$$\overset{\circ}{J} = \varepsilon \overline{\mathbf{g}}(J), \tag{76}$$
$$\overline{\mathbf{g}}(J) = (2\pi)^{-k} \int_0^{2\pi} \ldots \int_0^{2\pi} \mathbf{g}(I,\varphi) d\varphi_1 \ldots d\varphi_k$$

в $l-$ мерной области $G \subset \mathbf{R}^l = \{J = (J_1,\ldots,J_l)\}$. Утверждается, что система (76) "хорошо аппроксимирует"систему (75). Заметим, что этот принцип- не теорема, не аксиома и не определение, а физическое предложение, т.е. расплывчато сформулированное и, строго говоря, неверное утверждение. Такие утверждение часто бывают плодотворными источниками математических теорем. Удовлетворительное исследование связи между решениями систем (75) и (76) в общем случае не проведено и посейчас.

При замене системы (75) системой (76) мы откидываем в правой части слагаемое $\varepsilon\widetilde{\mathbf{g}}(I,\varphi) = \varepsilon\mathbf{G}(I,\varphi) - \varepsilon\overline{\mathbf{g}}(I)$. Это слагаемое имеет порядок $\varepsilon$, такой же, как и оставленное слагаемое $\varepsilon\overline{\mathbf{g}}(I)$. Чтобы понять различие роли слагаемых $\overline{\mathbf{g}}$ и $\widetilde{\mathbf{g}}$ в $\mathbf{g}$ рассмотрим простейший пример:

**Пример.** Рассмотрим случай $k = l = 1$,

$$\overset{\circ}{\varphi} = \omega \neq 0, \quad \overset{\circ}{I} = \varepsilon g(\varphi).$$

Покажем, что при $0 < t < 1/\varepsilon$

$$|I(t) - J(t)| < c\varepsilon, \quad \text{где} \quad J(t) = I(0) + \varepsilon\overline{g}t.$$

**Решение.**

$$I(t) - I(0) = \int_0^t \varepsilon g(\varphi_0 + \omega t) dt = \int_0^t \varepsilon\overline{g} dt + \frac{\varepsilon}{\omega}\int_0^{\omega t} \widetilde{g}(s) ds = \varepsilon\overline{g}t + \frac{\varepsilon}{\omega} h(\omega t),$$

где $h(\varphi) = \int_0^{\varphi} \widetilde{g}(s) ds$-периодическая(потому что среднее равно нулю) и, следовательно, ограниченная функция. Таким образом, изменение $I$ со вдеменем состоит из двух частей: осцилляции порядка $\varepsilon$, зависящей от $\widetilde{g}$ и систематической "эволюции"со скоростью $\varepsilon\overline{g}$

Принцип усреднения основан на представлении о том, что и в общем случае движение системы (75) можно разделить на "эволюцию"(76) и малые осцилляции. В общем виде такое представление необходимо, но сам принцип неверен. Тем не менее применим его к гамильтоновой системе (75)

$$\overset{\circ}{\varphi}= \frac{\partial}{\partial I}(H_0(I) + \varepsilon H_1(I,\varphi)),$$

$$\overset{\circ}{I}= -\frac{\partial}{\partial \varphi}(H_0(I) + \varepsilon H_1(I,\varphi)).$$

где возмущение $H_1-$ $2\pi$ периодическа по $\varphi$ функция. В качестве правой части усредненной системы (76) тогда получим

$$-\overline{\mathbf{G}} = (2\pi)^n \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi} H_1(I,\varphi) d\varphi = 0.$$

Иными словами, в гамильтоновой невырожденной системе эволюции нет.

Один из вариантов этого совсем нестрогого вывода приводит к так называемой теореме Лапласа: *Большие полуоси кеплеровых эллипсов планет не имеет вековых возмущений.* Сказанного достаточно, чтобы убедиться в важности принципа усреднения. Сформулируем теперь теорему, обосновывающую этот пронцип в одном весьма частном случае–случае одночастотных колебаний ($k = 1$). Эта теорема показывает, что усредненное уравнение правильно описывет эволюцию на большом отрезке времени ($0 < t < 1/\varepsilon$), не не глобально, как в случае регулярной асимптотики, когда возмущенная траектория существует $\varepsilon-$ трубке предельного решения ($\varepsilon = 0$), на всем интервале существования этого решения.

**Усреднение в одночастотной системе.** Рассмотрим систему $l$+1 дифференциального уравнения

$$\left.\begin{array}{rl} \overset{\circ}{\varphi}= & \omega(I) + \varepsilon f(I,\varphi), \\ \overset{\circ}{I}= & \varepsilon g(I,\varphi), \end{array}\right\} \quad \begin{array}{c} \varphi \ (\mathrm{mod} 2\pi) \in S^1 \\ I \in G \subset \mathbf{R}^l, \end{array} \tag{77}$$

где $f(I,\varphi{+}2\pi) \equiv f(T,\varphi)$, $g(I,\varphi{+}2\pi) \equiv g(T,\varphi)$ и усредненную систему из $l$ уравнений

$$\overset{\circ}{J}= \varepsilon\overline{g}(J), \quad \text{где} \quad \overline{g}(J) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(J,\varphi)d\varphi \tag{78}$$

Обозначим через $I(t), \varphi(t)$ решение системы (77) с начальным условием $I(0), \varphi(0)$, а через $J(t)-$ решение системы (78) с тем же начальным условием $J(0) = I(0)$(рис225).

Теорема 0.41: Пусть

1) функции $\omega, f, g$ определены, когда $I$ меняется в ограниченной области $G$, и в этой области ограничены со своими производными до второго порядка включительно:

$$\|\omega, f, g\|_{C^2(G\times S^1)} < c_1;$$

2) в области $G$

$$\omega(I) > c > \ 0;$$

3) при $0 \leq t \leq 1\varepsilon$ точка $J(t)$ принадлежит $G_d$:

$$J(t) \in G_d = \{I \in G, \ \varrho(I, \partial G) > d\},$$

т.е. принадлежит множеству внутренних точек $G$, расстояние которых до граниы $\varrho(I, \partial G) > d$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon(0 < \varepsilon < \varepsilon_0)$

$$|I(t) - J(t)| < \ c_9\varepsilon \ \text{ для всех } \ t, \ \ 0 \leq t \leq 1/\varepsilon,$$

где постоянная $c_9 > 0$ зависит от $c_1, c, d$ но не от $\varepsilon$.

Некоторые приложения этой теоремы будут даны ниже("адиабатические инварианты"). Заметим, что основная идея доказательства этой теремы(замена переменных, убивающая возмущения) важнее самой теоремы; это- одна из основных идей в теории ОДУ; она встречается уже в элементарном курсе в виде "метода вариации постоянных".

**Доказательство теоремы об усреднении.** Вместо переменных $I$ введем новые переменные $P$

$$P = I + \varepsilon\mathbf{k}(I, \varphi), \tag{79}$$

где $2\pi-$ периодические по $\varphi$ функции $\mathbf{k}$ подберем так, чтобы вектор $P$ удовлетворял более простому дифференциальному уравнению. Скорость изменения $P(t)$, согласно (77) и (79), равна

$$\overset{\circ}{P}=\overset{\circ}{I} + \varepsilon\frac{\partial k}{\partial I}\overset{\circ}{\varphi}= \varepsilon[g(I, \varphi) + \frac{\partial k}{\partial \varphi}\omega(I)] + \varepsilon^2\frac{\partial k}{\partial I}g + \varepsilon^2\frac{\partial k}{\partial \varphi}f \tag{80}$$

Предположим, что замену (79) можно обратить, так что

$$I = P + \varepsilon h(P, \varphi, \varepsilon) \tag{81}$$

(где функции $\mathbf{H}$ $2\pi-$ периодичны по $\varphi$). Тогда из (80), (81) следует, что $P(t)$ подчиняется системе уравнений

$$\overset{\circ}{P}= \varepsilon \ \overline{g}(P) + \varepsilon[g(P, \varphi) - \overline{g}(P) + \frac{\partial k}{\partial \varphi}\omega(P)] + R, \tag{82}$$

где остаточный член $R$ второго по $\varepsilon$ порядка малости:

$$|R| < \ c_2\varepsilon^2, \ \ c_2(c_1, c_3, c_4) > 0, \tag{83}$$

если только

$$\|\omega\|_{C^2} < c_1, \ \ \|f\|_{C^2} < c_1, \ \ \|g\|_{C^2} < c_1, \ \ \|k\|_{C^2} < c_3, \ \|h\|_{C^2} < c_4. \tag{84}$$

Постараемся теперь выбрать замену переменных (79) так,тобы обратить в 0 член с $\varepsilon$ в (82). Мы получаем для $k$ уравнение

$$\frac{\partial k}{\partial \varphi} = -\frac{1}{\omega}g.$$

Вообще говоря, такое уравнение неразрешимо в классе периодических по $\varphi$ функций $\mathbf{k}$. Действительно, среднее значение (по $\varphi$) левой части равно всегда 0, а среднее значение правой части может и не равняться 0. Поэтому мы не можем выбрать $\mathbf{k}$ так, чтобы убить целиком часть с $\varepsilon$ в (82). Однако мы можем убить всю "периодическую"часть $g$,

$$\widetilde{g} = g(P, \varphi) - \overline{g}(P),$$

полагая

$$k(P, \varphi) = -\int_0^{\varphi} \frac{\widetilde{g}(P, \varphi)}{\omega(P)} d\varphi. \tag{85}$$

Итак, определим функцию $k$ формулой (85). Тогда,виду условий 1) и 2) доказываемой теоремы, функции $k$ удовлетворяют оценке $\|k\|_{C^2} < c_3$, где $c_3(c_1, c) > 0$. Чтобы установить неравенство (84), остается оценить $h$. Для этого прежде всего нужно показать, что замена (79) обратима. Зафиксируем число $\alpha$.

Лемма 0.13: *Если $\varepsilon$ достаточно мало, то ограниченное отображение (79) (при любом фиксированном значении параметра $\varphi$.)*

$$I \to I + \varepsilon k, \quad \textit{где} \;\; \|k\|_{C^2} < c_3,$$

*на область $G_\alpha$(состоящую из точек, входящих в $G$ с $\alpha-$ окрестностью) есть диффеоморфизм. Обратный диффеоморфизм (81) в области $G_{2\alpha}$ удовлетворяет оценке $\|h\|_{C^2} < c_4$ с некоторой постоянной $c_4(\alpha, c_3) > 0$.*

Из леммы вытекает, что при достаточно малом $\varepsilon$ справедливы все оценки (84). Значит, справедлива также оценка (83). Сравним теперь системы дифференциальных уравнений для $J$

$$\overset{\circ}{J} = \varepsilon\overline{g}(J)$$

и для $P$

$$\overset{\circ}{P} = \varepsilon\overline{g}(P) + R. \tag{86}$$

Поскольку разница между правами частями порядка $\leq \varepsilon^2$(см. (83), то за время $t \ll 1/\varepsilon$ решение разойдется на расстояние $|P - J| \ll \varepsilon$( рис.226). С другой стороны $|I - P| = \varepsilon|k| \ll \varepsilon$. Итак, разность $|I - J|$ при $t \ll 1/\varepsilon$ имеет порядок $\ll \varepsilon$, что и требуется

Переходя к аккуратным оценкам, введем величину

$$z(t) = P(t) - J(t)$$

Тогда из (85), (86) вытекает

$$\overset{\circ}{z} = \varepsilon(\overline{g}(P) - \overline{g}(J)) + R = \varepsilon\frac{\partial\overline{g}}{\partial P}z + R',$$

где $|R'| < c^2\varepsilon^2 + c_5\varepsilon|z|$, если отрезок $[P, J]$ лежит в $G_\alpha$. В этом предположении мы находим

$$|\overset{\circ}{z}| \leq c_6\varepsilon|z| + c_2\varepsilon^2, \quad c_6 = c_5 + c_1, \quad |z0)| \leq c_3\varepsilon \tag{87}$$

Применяя лемму 2 лекции 5 из этой оценки получим

$$|z(t)| \leq c_3 \varepsilon e^{c_6 \varepsilon t} + c_2 \varepsilon^2 (e^{c_6 \varepsilon t} - 1)$$

Отсюда следует, что

$$|z(t)| < c_7 \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq 1/\varepsilon, \quad c_7 = (c_3 + c_2 \varepsilon) e^{c_6}$$

Отсюда следует, что при $\alpha = d/3$ и $\varepsilon$ достаточно малом отрезок $[P(t), J(t)]$ на интервале $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$ весь лежит внутри $G_\alpha$ и следовательно

$$|P(t) - J(t)| < c_8 \varepsilon, \quad 0 \leq t \leq 1/\varepsilon.$$

С другой стороны $|P(t) - I(t)| < \varepsilon |k| < c_3 \varepsilon$. Итак, при всех $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$

$$|I(t) - J(t)| < c_9 \varepsilon, \quad c_9 = c_8 + c_3 > 0,$$

и теорем доказана.

**Доказательство леммы(0.13).** Нужная оценка непосредственно вытекает из теоремы о неявной функции. Некоторое затруднение вызывает лишь взаимная однозначность отображения $I \to I + \varepsilon k$ в области $G_\alpha$. Заметим, что функция $K$ удовлетворяет в области $G_\alpha$ условию Липшица(с некоторой постоянной $l(\alpha, c_3)$). Рассмотрим две точки $I_1, I_2$ из $G_\alpha$. При достаточно малом $\varepsilon$( а именно при $l(\alpha, c_3)\varepsilon < 1$) расстояние между $\varepsilon k(I_1)$ и $\varepsilon k(I_2)$ будет меньше $|I_1 - I_2|$. Поэтому $I_1 + \varepsilon k(I_1) \neq I_2 + \varepsilon k(I_2)$. Итак, отображение (79) в $G_\alpha$ взаимно однозначно, и лемма доказана.

## Лекция 15. Условно-периодическое движение.

**Условно-периодическое движение.** В предыдущих лекциях нам часто встречалось условно-периодическое движение: фигуры Лиссажу, прецессия, нутация, вращение волчка и т.п.

Определение 0.12: Пусть $T^n$- $n$ мерный тор, $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)(\mathbf{modd} 2\pi)-$ условные координаты. Тогда условно-периодическим движением называется однопараметрическая группа диффеоморфизмов $T^n \to T^n$, заданная дифференциальными уравнениями (рис.221)

$$\overset{circ}{\varphi} = \omega, \quad \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) = \text{const}\,.$$

решение которых

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \omega\ t.$$

Таким образом, на карте $\{\varphi\}$ траектории–прямые линии. Траектория на торе называется обмоткой тора.

**Пример.** Пусть $n = 2$. Если $\omega_1/\omega_2 = k_1/k_2,\ k_j \in \mathbf{N}$, то траектории замкнуты; если $\omega_1/\omega_2$ иррационально, то траектории на торе всюду плотны(теорема Пуанкаре).

Величины $\omega_1, \ldots, \omega_n$ называются частотами условно-периодического движения. Частоты называются независимыми, когда они линейно независимы над полем рациональных чисел: если $k \in \mathbf{Z}^n$ и $(k, \omega) = 0$ то $k = 0$.

**Пространственные и временные среднме.** Пусть $f(\varphi)$- интегрируемая функция на торе $T^n$.

Определение 0.13: **Пространственным средним** функции $f$ на торе $T^n$ назывется число
$$\overline{f} = (2\pi)^{-n} \int_0^{2\pi} \dots \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi_1 \dots d\varphi_n.$$

Рассмотрим значения функции $f(\varphi)$ на траектории $\varphi(t) = \varphi_0 + \omega\ t$. Это-функция времени $f(\varphi_0 + \omega\ t)$. Рассмотрим ее среднее

Определение 0.14: *Временным средним функции $f$ на торе $T^n$ называется функция*

$$f^*(\varphi_0) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T f(\varphi_0 + \omega\ t) dt$$

*(определенная там, где предел существует.)*

Теорема 0.42 (Теорема об усреднении.): Временное среднее всюду существует и совпадает с пространственным средним, если $f$ непрерывна, а частоты $\omega_j$ независимы. Если функция $f$ на торе и $f(\varphi_0 + \omega\ t)$ на оси $t$ интегрируемы по Риману, то временное среднее также существует и совпадает с пространственным.

**Задача.** Покажите, что если частоты зависимы, то временное среднее может не всюду сопадать с пространственным.

Следствие 0.9: Если частоты независимы, то каждая траектория $\{\varphi(t)\}$ всюду плотна на торе $T^n$.

Предположим противное. Тогда в окрестности $D$ некоторой точки тора нет точек траектории $\varphi(t)$. Легко построить непрерывную функцию $f$, равную нулю вне $D$ и с пространственным средним $\overline{f} = 1$.

Следствие 0.10: Если частоты независимы, то каждая траектория равномерно распеределена на торе $T^n$.

Это означает, что доля времени, которое траектория проводит в области $D$ пропорциональна мере $D$. Точнее, пусть $D$-измерима(по Жордану) область на $T^n$. Обозначим через $\tau_D(T)$ количество времени, которое отрезок $\leq t \leq T$ траектории $\varphi(t)$ находится внутри $D$.(Мы предполагаем, что множество таких моментов времени,которые движущая точка проводит в области, измеримо.) Тогда

$$\lim_{T\to\infty} \frac{\tau_D(T)}{T} = \frac{\mathbf{mes}(D)}{(2\pi)^n}$$

**Доказательство следствия (0.10).** Применим терему к характеристической функции $f$ множества $D$($f$ интегрируема по Риману, так как область $D$ измерима по Жордану). Тогда $\int_0^T f(\varphi(t))dt = \tau_D(T)$, а $\overline{f} = \mathbf{mes} D/(2\pi)^n$, и следствие непосредственно вытекает из теоремы.

Следствие 0.11: В последовательности

$$1, 2, 4, 8, 1, 3, 6, 1, 2, 5, 1, 2, \dots$$

первых цифр чисел $2^n$ число 7 всречается чаще, чем 8 в $(\lg 8 - \lg 7)/(\lg 9 - \lg 8)$ раз.

Теорема об усреднении неявно встречается уже в работах Лапласа, Лагранжа и Гаусса по небесной механике; она является одной из первых эргодических теорем. Строгое доказательство дали лишь в 1909 г. П.Боль и Г.Вейль всвязи с задачей Лагранжа о среднем движении перигеля Земли.

**Доказательство Г.Вейля теоремы (0.42)**

Лемма 0.14: Теорема верна для экспонент, $f = e^{i(k,\varphi)},\ k \in \mathbf{Z}^n$.

**Доказательство.** Если $k = 0$, то

$$\overline{f} = f = f^* = 1$$

и теорема очевидна. Если $k \neq 0$, то $\overline{f} = 0$(в силу $2\pi$ периодичности $f$). С другой стороны

$$\int_0^T e^{i(k,\varphi_0+\omega t)}dt = e^{i(k,\varphi_0)}\frac{e^{i(k,\omega)T}-1}{i(k,\omega)}$$

где $(k,\omega) \neq 0$ в силу независимости частот. Поэтому временное среднее

$$\lim_{T\to\infty} e^{i(k,\varphi_0)}\frac{e^{i(k,\omega)T}-1}{i(k,\omega)} = 0 \tag{88}$$

Лемма 0.15: Терема верна для тригонометрических полиномов

$$f = \sum_{|k|<N} f_k e^{i(k,\varphi)}.$$

Временное и пространственное средние зависят от $f$ линейно, поэтому совпадают по лемме (0.14).

Лемма 0.16: Пусть $f$ вещественная непрерывная(или хотя бы интегрируемая по Риману) функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существуют два тригонометрических полинома $P_1, P_2$ таких, что

$$P_1 < f < P_2, \quad (2\pi)^n\int_{T^n}(P_2 - P_1)d\varphi < \varepsilon.$$

**Доказательство.** Пусть сначала $f$ непрерывна. По теореме Вейерштрасса ее можно приблизить тригонометрическим полиномом $P,\ |f - P| \leq \varepsilon/2$. Полиномы $P_1 = p - \varepsilon/2,\ P_2 = P + \varepsilon/2$-искомые.

Если же $f$ разрывна, но интегрируема по Риману, то существуют две непрерывные функции $f_1, f_2$ так что

$$f_1 < f < f_2, \ \ (2\pi)^n\int_{T^n}(f_2 - f_1)d\varphi < \varepsilon/3$$

(рис.222 соответствует характеристическоц функции отрезка). Аппроксимируем $f_1$ и $f_2$ полиномами $P_1 < f_1 < f_2 < P_2$

$$(2\pi)^n\int_{T^n}(P_2 - f_2)d\varphi < \varepsilon/3, \ \ (2\pi)^n\int_{T^n}(f_1 - P_1)d\varphi < \varepsilon/3$$

получим требуемое. Лемма доказана.

Теперь легко закончить доказательство теоремы (0.42) . Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда по лемме (0.16) существуют тригонометрические полиномы $P_1 < f < P_2$, $(2\pi)^n \int_{T^n}(P_1 - P_1)d\varphi < \varepsilon$. При любот $T$ имеем тогда

$$\frac{1}{T}\int_0^T P_1(\varphi(t))dt < \frac{1}{T}\int_0^T f(\varphi(t))dt < \frac{1}{T}\int_0^T P_2(\varphi(t))dt$$

По лемме (0.15) при $T > T_0(\varepsilon)$,

$$|\overline{P_i} - \frac{1}{T}\int_0^T P_i(\varphi(t))dt| < \varepsilon, \quad i = 1,2$$

($T_0(\varepsilon)$ определяется пределом (88)). Далее, $\overline{P_1} < \overline{f} < \overline{P_2}$ и $\overline{P_2} - \overline{P_1} \le \varepsilon$. Поэтому $\overline{P_2} - \overline{f} \le \varepsilon$, $\overline{f} - \overline{P_1} \le \varepsilon$; следовательно при $T > T_0(\varepsilon)$,

$$|\frac{1}{T}\int_0^t f(\varphi(t)dt - \overline{f}| < 2\varepsilon.$$

**Задачи.**

1. Двумерный осциллятор с кинетической энергией $T = 1/2 \overset{\circ}{x}{}^2 + 1/2 \overset{\circ}{y}{}^2$ и потенциальной энергией $U = 1/2x^2 + y^2$ совершает колебания с амплитудами $a_x = 1$, $a_y = 1$. Найти временное среднее кинетической энергии.
Решение уравнения для двумерного осциллятора (классический маятник)

$$x(t) = c_1 \sin t + c_2 \cos t, \quad c_1^2 + c_2^2 = a_x^2 = 1,$$

$$y(t) = c_3 \sin t + c_4 \cos t, \quad c_3^2 + c_4^2 = a_y^2 = 1,$$

Тогда

$$|\overset{\circ}{x}(t)|^2 = c_1^2\cos^2 t + c_2^2 \sin^2 t - c_1c_2 \sin 2t = \frac{1}{2}a_x^2 + \frac{1}{2}c_1^2\cos 2t - \frac{1}{2}c_2^2 \sin 2t - c_1c_2 \sin 2t$$

$$|\overset{\circ}{y}(t)|^2 = c_3^2\cos^2 t + c_4^2 \sin^2 t - c_3c_4 \sin 2t = \frac{1}{2}a_y^2 + \frac{1}{2}c_3^2\cos 2t - \frac{1}{2}c_4^2 \sin 2t - c_3c_4 \sin 2t$$

Отсюда

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{2}\frac{1}{T}\int_0^t (|\overset{\circ}{x}(t)|^2 + |\overset{\circ}{y}(t)|^2)dt = \frac{1}{4}(a_x^2 + a_y^2) = \frac{1}{4}$$

2. Пусть $\omega_k$ независимы, $a_k > 0$. вычислить

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\mathbf{arg}\sum_{k=1}^{3} a_k e^{i\omega_k t}$$

**Ответ.** $(\omega_1\alpha_1 + \cdots + \omega_3\alpha_3)/\pi$, где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$- углы треугольника со сторонами $a_k$(рис.223). Если же одно из чисел $a_k$ больше суммы двух других, так что треугольника составить нельзя, то искомая средняя угловая скорость есть $\omega_k$.

**Метод усреднения примеры.** Вернемся снова к методу усреднения, применяемого для систем, приведенных к "стандартномой форме"

$$\frac{dx}{dt} = \varepsilon\ F(x,t), \quad x \in R^n, \tag{89}$$

где $\varepsilon-$ малый параметр, предполагается, что при постоянном $x$ существует "среднее значение"$F_0(x)$ функции $F(t,x)$

$$F_0(x) = \lim_{T\to\infty}\ \frac{1}{T}\ \int_0^T\ F(t,x)dt. \tag{90}$$

В частности, этот предел существует, если функция $F(x,t)$ периодическая по $t$ или является суммой периодических по $t$ функций с какими угодно периодами. При переходе к мндленной переменной $\tau = \varepsilon t$, получим

$$\frac{dx}{d\tau} = \ F(x, \frac{\tau}{\varepsilon}), \quad x \in R^n, \tag{91}$$

т.е. справа есть осцилляция, которую мы и должны осреднить. На медленном времени влияние осцилляций должно быит несущественным. Имеем

$$F_0(x) = \lim_{T\to\infty}\ \frac{1}{T}\ \int_0^T\ F(t,x)dt = \lim_{\mathcal{T}\to\infty}\ \frac{1}{\mathcal{T}}\ \int_0^{\mathcal{T}}\ F(\frac{\tau}{\varepsilon},x)d\tau$$

Теорема 0.43 ((Теорема Боголюбова-Митропольского(параг. 26)).): *Пусть при* $0 \le t < \infty,\ x \in D \subset R^n$, *вектор-функции* $F(t,x)$ *непрерывны по* $t,x$ *ограничена и удовлетворяет условию Липшица по* $x$. *Пусть равномерно по* $x \in D$ *существует предел (90). Тогда для любых сколь угодно малых* $\varrho, \eta$ *и сколь угодно большое* $L$ *существует такое* $\varepsilon_0 > 0$, *что если* $\xi(t)$*-решение уравнения*

$$\frac{d\xi}{dt} = \varepsilon\ F_0(\xi), \tag{92}$$

*лежащее при* $0 \le t < \infty$ *в области* $D$ *вместе со своей* $\varrho-$ *окрестностью, то для* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *решение* $x(t,\varepsilon)$ *уравнения (89) с начальным условием* $x(0,\varepsilon) = \xi(0)$ *при* $0 \le t \le L/\varepsilon$ *существует и удовлетворяет неравенству*

$$|x(t,\varepsilon) - \xi(t)| < \ \eta.$$

(Н.Н.Боголюбов-Ю.А.Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, изд.2, М.Физматгиз, 1958)

Теорема 0.44 ((Боголюбов-Митропольский(параг. 29)).): *Пусть при* $-\infty < t < \infty,\ x \in D \subset R^n$ *функции* $F(t,x),\ \partial F/\partial x_i (i = 1,\dots,n)$ *ограничены и равномерно непрерывны по* $x$; $F(t,x)$ *периодическая по* $t$. *Пусть в некоторой внутренней точке* $\xi_0 \in D$ *для функции* $F_0(x)$ *имеем* $F_0(0) = 0$ *и для матрицы* $A = (\partial F_{0i}(\xi_0)/\partial x_j)_{ij},\ i,j = 1,\dots,n$, *все собственные значения* $\operatorname{Re}\lambda_j \ne 0$. *Тогда существуют такие* $\varepsilon_0 > 0,\ \varrho > 0$ *что для* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *уравнение (89) имеет в* $\varrho-$ *окрестности точки* $\xi_0$ *единственное решение* $x^*(t)$, *содержащееся там при* $-\infty < t < \infty$. *Это решение периодично по* $t$ *с тем же периодом и равномерно стремится к* $\xi_0$ *при* $\varepsilon \to 0$; *при малых* $\varepsilon$ *оно асимптотически устойчиво, если для матрицы* $A$ *все* $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$, *и неустойчиво, если* $\operatorname{Re}\lambda > 0$ *хотя бы для одного* $\lambda_j$.

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение

$$x'' + \omega^2 x = \varepsilon f(x, x')$$

Перейдем к системе

$$\overset{\circ}{x} = y, \quad \overset{\circ}{y} = -\omega^2 x + \varepsilon f(x, y)$$

При $\varepsilon = 0$ имеем решение $x = a\cos\psi,\ y = -a\omega\sin\psi, \quad \psi = \omega t + \theta$, с произвольными постоянными $a, \theta$. При малых $\varepsilon \neq 0$ решение ищем в виде

$$x = a(t)\cos(\omega t + \theta(t)),\ y = -a(t)\omega\sin(\omega t + \theta(t)) \tag{93}$$

Подставляя это в систему, получим

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega}\ f(a\cos\psi, -a\sin\psi)\sin\psi,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\varepsilon}{a\omega}\ f(a\cos\psi, -a\sin\psi)\cos\psi, \quad \psi = \omega t + \theta(t).$$

Полученная система имеет стандартную форму. Возьмем $f(x, y) = (1 - x^2)y$ и применим к этой системы метод усреднения. В этом случае система после перехода от произведения тригонометрических фукнкций к сумме, примет вид

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon a(\frac{1}{2} - \frac{a^2}{8} - \frac{1}{2}\cos 2\psi + \frac{a^2}{8}\cos 4\psi),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \varepsilon((\frac{1}{2} - \frac{a^2}{4})\sin 2\psi - \frac{a^2}{8}\sin 4\psi), \quad \psi = \omega t + \theta(t).$$

Усредняя по $t$ получаем систему первого приближения

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon a(\frac{1}{2} + \frac{a^2}{8}), \quad \frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Таким образом, в первом прближении сдвиг фазы $\theta$ постоянна, а амплитуда $a(t)$ возрастает когда $0 < a(t) < 2$, и убывает, когда $a(t) > 2$. Следовательно, если $a(t_0) \neq 0$, то $a(t) \to 2$, и на плоскости $x, y$ решение (93) приближается к предельному циклу

$$x = 2\cos(\omega t + \theta_0), \quad y = -2\omega\sin(\omega t + \theta_0).$$

**Релаксационные колебания.** Такие колебания могут возникать в системах с малым параметром при производных(сингулярных задачах)

$$\mu x' = F(x, y), \quad y' = G(x, y). \tag{94}$$

При $\mu = 0$ первое уравнение системы перестает быть дифференциальным и будет изображать линию $F(x, y) = 0$ на плоскости $x, y$. По этой линии происходит движение в силу второго уравнения системы. При малых $\mu \neq 0$ эта система спределяет вектор скорости $(x', y')$ и в точках, не лежащих на линии $F(x, y) = 0$. В точках $F(x, y) \neq 0$ при малых $\mu$ величина $x'$ будет большой и вектор $(x', y')$ будет почти параллелен оси

$Ox$. Точка $(x, y)$ будет двигаться с большой скоростью(**быстрое движение**) почти параллельно оси $Ox$, пока не попадет в малую окрестность линии $F(x, y) = 0$ или пока не выйдет из области, в которой рассматривается система.

Пусть $\mu > 0$ и на некотором участке линии $F(x, y) = 0$ имеем $\partial_x F < 0$. Тогда правее этого участка $F(x, y) < 0$ и $x' < 0$, а левее $F(x, y) > 0$ и $x' > 0$. Точка $(x, y)$ будет двигаться с большой скоростью (при малых $\mu$) к этому участку, а попав в его окрестность(ширина порядка $\mu$) будет двигаться вдоль этого участка в силу уравнения $y' = G(x, y)$(**медленное движение**). Наоборот, вблизи участков, где $F(x, y) > 0$ при малых $\mu > 0$ точка $(x, y)$ будет удалятся от этих участков.

**Пример 4.** Рассмотрим систему с малым параметром $\mu > 0$

$$\mu \overset{\circ}{x} = y + 3x - x^3, \quad \overset{\circ}{y} = -x.$$

При $\mu = 0$ движения происходят только по кривой $y = x^3 - 3x$ со скоростью $\overset{\circ}{y} = -x$.

При малых $\mu > 0$ движения возможны на всей плоскости. Выше кривой $y = x^3 - 3x$ имеем $\overset{\circ}{x} > 0$, а ниже $\overset{\circ}{x} < 0$ скорости этих движений большие при малых $\mu$ и направлены почти горизонтально (рис.) Любое решение попадает в окрестность (ширины порядка $\mu$) этой кривой и идет вблизи кривой в направление, указанном стрелками. Достигнув точки $B$ или $D$, оно срывается с кривой и быстро движется от $B$ к$C$, а от $D$ к $A$, после чего опять идет вдоль дуги $CD$ или $AB$ кривой и т.д. Таким образом, любая траектория, кроме особой точки $O$ приближается к предельному циклу, расположенному вблизи замкнутой кривой $ABCDA$(петля гистерезиса). Движения вблизи отрезков $BC$ и $DA$–бысирые, а вблизи дуг $AB$ и $CD$- медленные. Такие колебания называюся **релаксационными.**

# КАНОНИЧЕСКИЙ ФОРМАЛИЗМ.

## Лекция 16. Принцип Гюйгенса. Оптико-механическая аналогия.

Основные понятия гамильтоновой механик–импульс $p$, функция Гамильтона $H$, форма $pdq - Hdt$ возникли при переносе на общие вариационные принципы и прежде всего принципа стационарного действия Гамильтона $\delta \int Ldt = 0$(траектория есть экстремаль действия), некоторых весьма простых и естественных понятий геометрической оптики, управляемой вариационным принципом Ферма.

**Волновые фронты.** Согласно экстремальному принципу Ферми свет распространяется из точки $q_0$ в точку $q_1$ да кратчайшее время. При этом, скорость света может зависеть от точки $q$(неоднородная среда), так и от направления луча(неизотропная среда, например кристалы). Свойства среды можно описать, задав в касательном пространстве в каждой точке $q$ поверхность(индикатрису). Для этого отложим по каждому направлению вектор скорости распространения света в данной точке по данному направлению(рис.192). Пусть теперь $t > 0$. Рассмотрим множество всех точек $q$, для которых свет из данной точки $q_0$ может дойти за время, меньшее или равное $t$. Граница этого множества

$\Phi_{q_0}(t)$ называется фронтом точки $q_0$ через время $t$ и состоит из точек, до которых свет может дойти за время $t$ и не может дойти быстрее. Между волновыми фронтами, соответствующим разным значениям $t$ имеется замечательное соотношение, открытое Гюйгенсом(рпс.193)

Теорема 0.45 (Принцип Гюйгенса.): Построим для каждой точки $q$ волнового фронта $\Phi_{q_0}(t)$ волновые фронты через время $s$, $\Phi_q(s)$. Тогда волновой фронт через время $s+t, \Phi_{q_0}(s+t)$ будет огибать построенные фронты $\Phi_q(s)$, $\Phi_{q_0}(t)$.

**Доказательство.** В самом деле, пусть $q_{s+t} \in \Phi_{q_0}(s+t)$. Тогда существует путь из $q_0$ в $q_{t+s}$ по которому время распространения света равно $t+s$ и нет более короткого. Рассмотрим точку $q_t$ на этом пути, до которой свет идет время $t$. Нмкакого более короткого пути от $q_0$ до $q_t$ не может быть, иначе путь $q_0 q_{t+s}$ не был бы кратчайшим. Поэтому точка $q_t$ лежит на фронте $\Phi_{q_0}(t)$. Точно также, путь $q_t q_{t+s}$ свет проходит за время $s$ и из точки $q_s$ до $q_{t+s}$ нет более короткого пути. Поэтому точка $q_{t+s}$ лежит на фронте точки $q_t$ за время $s$ : $\Phi_{q_t}(s)$. Покажем что фронты $\Phi_{q_t}(s)$ и $\Phi_{q_0}(t+s)$ касаются в точке $q_{t+s}$. Действительно, если бы они пересекались(рис194), то в некоторые точки $\Phi_{q_0}(t+s)$ можно было бы добраться из $q_t$ за время, меньшее $s$, а значит, из $q_0$ за время, меньшее $t+s$. Это противоречит определению $\Phi_{q_0}(t+s)$. Итак, фронты $\Phi_{q_t}(s)$ и $\Phi_{q_0}(t+s)$ касаются в точке $q_{t+s}$.

Конечно точку $q_0$ можно было бы заменить кривой, поверхностью или вообще замкнутым множеством, $q \in R^3$ заменить любым гладким многообразием, а распространение света–распространением любого возмущения, передающегося **локально** и рассмотреть фронты этого возмущения от кривых, поверхностей и т.д. Принцип Гюйгенса приводит к двум описаниям процесса распространения. Во первых, мы можем следить за дучами, т.е. кратчайшими путями распространения света. В этом случае локальный характер распространения задается вектором скорсти $\mathring{q}$. Если направление дуча известно, то величина вектора скорости задается свойствами среды(индикатриса). С другой стороны, мы можем следить за врлновым фронтом.

Предположим, что в пространство $\{q\}$ задана риманова метрика. Тогда можно говорить о скорости движения волнового фронта. Рассмотрим, например, распространение света в среде, заполняющей обычное евклидово пространство. Тогда движение волнового фронта можно характеризовать перпендикулярным фронту вектором $\mathbf{p}$, который строется следующим образом:

Для каждой точки $q_0$ определим функцию $S_{q_0}(q)$ как оптичекскую длину пути от $q_0$ до $q$, т.е. наименьшее время распространения света от множество точек $q_0$ до $q$. Множество уровня $\{q : \ S_{q_0}(q) = t\}$ есть не что иное, как фолновой фронт $\Phi_{q_0}(t)$. Градиент функции $S$(в смысле упомянутой выше метрики) перпендикулярен волновому фронту и характеризует движение волнового фронта. При этом, чем больше градиент, тем ьедленнее движение фронта. Поэтому Гамильтон назвал вектор

$$p = \partial_q S$$

вектором нормальной медлительности фронта. Направление луча $\mathring{q}$ и направление движения фронта $\mathbf{p}$ в неизотропной среде не совпадают(фронты-не сферы)

Определение 0.15: Направление гиперплоскости, касающейся индикатрисы в точке $v$, называется сопряженным к направлению $v$.

Теорема 0.46: Направление волнового фронта $\Phi_{q_0}(t)$ в точке $q_t$ сопряженно направлению $\overset{\circ}{q}$.

**Доказательство.** Рассмотрим(рис.197) точки $q_\tau$ луча $q_0 q_t$, $0 \leq \tau \leq t$. Пусть $\varepsilon$ настолько мало. что фронт $\Phi_{q_{t-\varepsilon}}(\varepsilon)$ отличается от индикатрисы точки $q_t$, умноженной на $\varepsilon$, лишь малыми порядка $O(\varepsilon^2)$, поскольку $\Phi_{q_{t-\varepsilon}}(\varepsilon)$ по определению есть множество точек, достижимых светом из $q_{t-\varepsilon}$ за время $\varepsilon$. Но луч есть $q(t) = q_{t-\varepsilon} + v\varepsilon + O(\varepsilon^2)$, где $v = \overset{\circ}{q}(t-\varepsilon)$. По принципу Гюйгенса, этот фронт $\Phi_{q_{t-\varepsilon}}(\varepsilon)$ касается фронта $\Phi_{q_0}(t)$ в точке $q_t$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ получаем сформулированную теорему.

при изменении вспомогательный метрики, с помощью которой мы определили вектор $\mathbf{p}$, будет меняться понятие скорости движения фронта, а значит, и величина и направление вектора $\mathbf{p}$. Однако дифференциальная форма $pdq = dS$ на пространстве $\{q\} = R^3$ определена не зависящим от вспомогательной метрики образом; ее значение зависит лишь выбранного фронта(или луча). На гиперплоскости, сопряженной вектору скорости, эта форма равна 0, а ее значение на векторе скорости равно 1.(Таким образом, векторы $\mathbf{p}$, соответствующие всевозможным фронтам, проходящим через данную точку, не произвольны, но подчинены одному условию: допустимые значения $\mathbf{p}$ заполняют в пространстве $\{p\}$ гиперплоскость, двойственную скорости.

**Оптико-механическая аналогия.** Вернемся к механике. Здесь траектории движения также являются экстремалями вариационного принципа, и можно строить механику как геометрическую оптику многомерного пространства. Именно так поступил Гамильтон:

| Оптика. | Механика. |
|---|---|
| Оптическая среда. | Расширенное конфигурационное пространство(q,t) |
| Принцип Ферма | Принцип Гамильтона $\delta \int Ldt = 0$ |
| Лучи | Траектории $q(t)$ |
| Индикатриса | Лагранжиан |
| Нормальная медлительность фронта $p$ | импульс $p$ |
| Выражение $p$ через скорость $\overset{\circ}{q}$ | Преобразование Лежандра |
| 1-форма $pdq$ | 1-форма $pdq - Hdt$ |

Неиспользованными остались оптическая длина пути $S_{q_0}(q)$ и принцип Гюйгенса. Их механические аналоги–функция действия и уравнение Гамильтона0Якоби, к которому мы перейдем ниже.

## Действие как функция координат и времени

Определение 0.16: Функция действия $S(q,t)$ называется интеграл

$$S_{q_0,t_0}(q,t) = \int_\gamma Ldt$$

вдоль экстремали $\gamma$, соединяющей точки $(q_0, t_0)$ и $(q_1, t_1)$.

Чтобы это определение было корректным, нужно принять некоторые предосторожности: нужно потребовать, чтобы экстремали, выходящие из точки $(q_0, t_0)$, более не пересекались, а образовывали так называемое центральное поле экстремалей(рис.198). Точнее, сопоставим каждой паре $(\overset{\circ}{q}_0, t_0)$ точку $(q, t)$- конец экстремали с начальными условиями $q(0) = q_0$, $\overset{\circ}{q}(0) = \overset{\circ}{q}_0$. Говорят, что экстремаль $\gamma$ включена в центральное поле, если отображение $(\overset{\circ}{q}_0, t_0) \to (q, t)$ невырожденное( в точке, соответствуюшейрассматриваемой экстремали $\gamma$ и следовательно, в некоторой ее окрестности). Можно доказать, что при достаточно малом $|t - t_0|$ экстремалm $\gamma$ включается в центральное поле.(При больших $|t - t_0|$ это не так, например для $\overset{\circ\circ}{q} - q = 0$).

Рассмотрим теперь достатоно малую окрестность конечной точки $(q, t)$ нашей экстремали. Каждая точка этой окрестности соединяется с $(q_0, t_0)$ единственной экстремалью рассматриваемого центрального поля. Эта экстремаль дифференцируемо зависит от конечной точки $(q, t)$. Поэтому в указанной окрестности корректно определение функции действия

$$S_{q_0, t_0}(q, t) = \int_\gamma Ldt$$

В геометрической оптике мы рассматривали дифференциал оптической длины пути. Естественно и здесь рассмотреть дифференциал функци действия.

Теорема 0.47: Дифференциал функции действия(при фиксированной начальной точке) равен

$$dS = hdq - Hdt,$$

где $p = \partial L/\partial \overset{\circ}{q}$ и $H = p\overset{\circ}{q} - L$- определяется по конечной скорости $\overset{\circ}{q}$ траектории $\gamma$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется введение нового объекта–инварианта Пуанкаре-Картана и языка 1- и 2-форм, к чему мы перейдем в следующей лекции. Теперь исследуем следствия этой теоремы.

Мы видим, что форма $pdq - hdt$, выше введенная нами искусственно, сама собой возникает при проведении оптико-механической аналогии из рассмотрения функции действия, соответствующей оптической длине пути.

**Уравнение Гамильтона-Якоби.** Вспомним, что вектор нормальной медлительности **p** не может быть совсем произвольным: он подчитяется одному условию

$$p\overset{\circ}{q} = 1,$$

вытекающему из принципа Гюйгенса.?????? Аналогичное условие накладывется и на градиент функциии действия $S$.

Теорема 0.48: Функция действия удовлетворяет уравнению гамильтона-Якоби

$$\partial_t S + H(\partial_q S, q, t) = 0 \tag{95}$$

Для доказательства теоремы достаточно заметить, что по предыдущей теореме(из представления дифференциала $dS$)

$$\partial_t S = -H(p,q,t), \quad p = \partial_q S.$$

Установленную связь между траекториями механической системы(лучами) и уравнением в частных производных(волновыми фронтами) можно использовать в двух направлениях. Во-первых некоторые решения уравнения (95) можно использовать для интегрирования ОДУ динамики. В этом состоит метод Якоби интегрирования канонических уравнений Гамильтона, к которому мы перейдем на следующей декции. Во-вторых, связь лучевой и волновой точек зрения позволяет свести интегрирование уравнений в частных производных(например (95)) к интегрированию системы ОДУ Гамильтона(к этому не раз мы вернемся в следующем семестре). Остановимся на этом несколько подробнее для (95). Поставим для уравнения Гамильтона-Якоби задачу Коши:

$$S(q,t_0) = S_0(q), \quad \partial_t S + H(\partial_q S, q, t) = 0.$$

Чтобы построить решение этой задачи, рассмотрим систему канонических уравнений Гамильтона

$$\overset{\circ}{p} = -\partial_q H, \quad \overset{\circ}{q} = \partial_p H$$

Рассмотрим начальные условия

$$q(t_0) = q_0, \quad p(t_0) = \partial_q S|_{q=q_0}.$$

Соответствующее этим начальным условиям решение изображается в $(q,t)$ пространстве кривой $q = q(t)$- экстремалью принципа $\delta \int L dt = 0$(где лагранжиан $L(q, \overset{\circ}{q}, t)$ есть преобразование Лежандра по $p$ от функции Гамильтона $H(p,q,t)$. Эта экстремаль называется характеристикой задачи Коши для (95), выходящей из точки $q_0$. Если значение $t_1$ достаточно близко к $t_0$ то характеристики, выходящие из близких точек $q$ не пересекаются при $t_0 \le t \le t_1, \ |q - q_0| < R$. Более того, значения $q_0$ и $t$ можно принять за координаты точки $A$ в области $|q - q_0| < R, \ t_0 \le t \le t_1$. Построим теперь функцию действия с начальным условием $S_0$:

$$S(A) = S_0(q_0) + \int_{q_0,t_0}^{A} L(q, \overset{\circ}{q}, t) dt$$

(интегрирование вдоль характеристики, ведущей в $A$).

Теорема 0.49: Функция $S$ есть решение нашей задачи Коши.

**Доказательство. ПЕРЕДОКАЗАТЬ** Действительно, начальное условие, очевидно, выполнено. Выполнение уравнения Гамильтона-Якоби проверяется, как в теореме о дифференциале действия (**??**). По лемме Стокса

$$\int_{\gamma_1} - \int_{\gamma_2} + \int_{\beta} - \int_{\alpha} p dq - H dt = 0$$

(рис.202). Но на $\alpha$ имеем $dt = 0,\ p = \partial S_0/\partial q$, поэтому

$$\int_\alpha pdq - Hdt = \int_\alpha pdq = \int_\alpha dS_0 = S_0(q_0 + \Delta q) - S_0(q_0).$$

Далее, $\gamma_{1,2}$ фазовые траектории, поэтому

$$\int_{\gamma_{1,2}} pdq - Hdt = \int_{\gamma_{1,2}} Ldt.$$

Итак,

$$\int_\beta pdq - hdt = [S_0(q_0 + \Delta q) + \int_{\gamma_2} Ldt] - [S_0(q_0) + \int_{\gamma_1} Ldt] = S(A + \Delta A) - S(A)$$

при $\Delta t \to 0$ получаем $\partial S/\partial t = -H,\ \partial S/\partial q = p$, что доказывает теорему.

**Задачи.**

1. Доказать единственность решения задачи Коши в области однозначно покрываемой характеристиками. Если продифференцировать уравнение Гамильтона-Якоби по $q$, получим

$$\partial_t \partial_q S + \partial_p H \partial_q^2 S + \partial_q H$$

Вдоль траектории $\frac{d}{dt}\partial_q S = \partial_q^2 S \partial_p H + \partial_t \partial_q S$. Отсюда вдоль траектории

$$\frac{d}{dt}\partial_q S = \partial_q^2 S \partial_p H - \partial_p H \partial_q^2 S + \partial_q H = \partial_q H.$$

Поскольку $\partial_q S|_{t=0} = \partial_q S_0 = p|_{t=0}$ отсюда следует, что вдоль траектории

$$\partial_q S(q(t), t) \equiv p(t)$$

2. Решить задачу Коши при $H = p^2/2,\ S_0 = q^2/2$, т.е.

$$\partial_t S + \frac{1}{2}(\partial_q S)^2 = 0, \quad S|_{t=0} = \frac{1}{2}q^2. \tag{96}$$

Канонические уравнения в этом случак

$$\overset{\circ}{p} = 0, \quad \overset{\circ}{q} = \partial_p H = p.$$

$$p(0) = \partial_q S_0 = q(0), \quad q|_{t=0} = q(0).$$

Отсюда

$$p(t) \equiv q(0), \quad q(t) = q(0)(1 + t)$$

и характеристики не пересекаются, поскольку по точке $(q, t)$ однозначно определяется характеристика, проходящая через эту точку, с начальным условием

$$q(0) = q/(1 + t). \tag{97}$$

Функцию Лагранжа определям преобразованием Лежандра. Стационарная точка функции $F(p) =\overset{\circ}{q}\ p - \frac{1}{2}p^2$

$$p =\overset{\circ}{q} \ \Rightarrow \quad L(\overset{\circ}{q}, q) = F(p)\big|_{p=\overset{\circ}{q}} = \frac{1}{2}(\overset{\circ}{q})^2$$

Теперь можно определить функцию действия

$$S(q,t) = S_0(q(0)) + \int_{(q(0),0)}^{(q,t)} L(\overset{\circ}{q})\ ds = \frac{1}{2}((\overset{\circ}{q}\ (0))^2 + \frac{1}{2}((\overset{\circ}{q}\ (0))^2 t = \frac{1}{2}((\overset{\circ}{q}\ (0))^2(1+t)$$

Из соотношения (97) следует

$$S(q,t) = \frac{1}{2}\frac{q^2}{1+t}$$

Из доказанной выше теоремы это искомое решение задачи Коши (**??**). Действительно

$$\partial_t S = -\frac{1}{2}\frac{q^2}{(1+t)^2}, \quad \frac{1}{2}\frac{1}{2}(\partial_q S)^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{(1+t)^2},$$

откуда следует, что $S(q,t)$-решение (**??**).

3. Нарисовать графики многозначных функций $S(q)$ и $p(q)$ при $t = t_3$(рис.201 характеристики для решения задачи Коши и рис203). Точке самопересечения графика $S$ соответствует на графике $p$ прямая максвелла: заштрихованные площади равны. График $S(q,t)$ имеет особенность, называемую ласточкиним хвостом, в точке $q = 0,\ t_2$.

В следующей лекции нам понадобится аппарат **1 и 2- форм,** который необходимо вспомнить(у Вас этот материал был в анализе).

## Лекция 17. Интегральный инвариант Пуанкаре-Картана.

**Гидродинамическая лемма.** Пусть $\mathbf{v}$ векторное поле в трехмерном ориентированном евклидовом пространстве $R^3$, $\mathbf{r} = \mathbf{rot v}$ поле ротора. Интегральные кривые $\mathbf{r}$ называются линиями ротора или вихревыми линиями. Пусть $\gamma_1$ замкнутая кривая в $R^3$. Линии ротора, проходящие через точки $\gamma_1$ образуют трубку ротора. Пусть $\gamma_2$ другая кривая, охватывающая ту же трубку ротора, так что $\gamma_1 - \gamma_2 = \partial\sigma$, где $\sigma$ часть поверхности трубки ротора, ограниченная кривыми $\gamma_1,\ \gamma_2$(2− цепь).

Лемма 0.17: Циркуляция поля $v$ по обеим кривым $\gamma_1$ и $\gamma_2$ одинакова, т.е.

$$\oint_{\gamma_1} vdl = \oint_{\gamma_2} vdl$$

По формуде Стокса $\oint_{\gamma_1} vdl - \oint_{\gamma_2} vdl = \int\int_\sigma \mathbf{rotv}d\mathbf{n} = 0$, так как $\mathbf{rotv}$ касается трубки ротора. Эта лемма имеет обобщение на любое нечетномерное $R^{2k+1}$. Чтобы ее сформултровать, перейдем от векторных полей к дифференциальным формам.
1-форма $\omega^1$ есть линейная комбинация дифференциалов координат: $\omega^1 = \sum_{j=1}^n v_j(q)dq_j$. Интеграл 1-формы по ориентированному контуру $\gamma$, соединяющему точки $M_0$ и $M_1$ есть циркуляция поля $v = (v_1 \dots, v_n)$:

$$\int_\gamma \omega^1 = \int_{t_0}^{t_1} \sum_{j=1}^n v_j(t) \overset{\circ}{q_j}(t)dt,$$

где $M_0 = q(t_0), M_1 = q(t_1)$. Удобнее всего взять за параметризацию на critвой ее длину от $M_0$ до $M_1$. Из этой формулы видно, что циркуляция $\mathbf{v}$ есть интеграл 1-формы $\omega^1$. На "бесконечно малой "кривой циркуляция равна $(v, \xi)\delta + o(\delta),\ \xi = \overset{\circ}{x}$ (т.е. можно считать, что действие 1-формы на касательном пространстве $\omega^1(\xi) = \lim_{|\delta\gamma|\to 0} \int_{\delta\gamma} \omega^1 = (v, \xi)$).

**Задача.** Если $k < j$, покажем что $\int\int_\sigma\ dq_k \wedge dq_j$ есть площадь проекции $\sigma$ на плоскость $(q_k, q_j),\ k < j,$.
В случае области $\sigma$ на плоскости $(q_k, q_j)$ приблизим ее малыми квадратами $K = (q_k^0, q_k^0 + \delta) \times (q_j^0, q_j^0 + \delta)$, для которых

$$\int\int_K d(q_k dq_j) = \int\int_K d((q_k - q_k^0)dq_j) = \delta \int_0^\delta dq_j = \delta^2 = |K|,$$

т.е. площади $K$. Дальше стандартные соображения приводят к доказательству утверждения задачи. Отсюда

$$\int\int_\sigma d\omega^1 = \oint_{\partial\sigma} \omega^1$$

Из этой формулы видно, что в каждой точке существует направление(а именно, направление ротора $r$) обладающее тем свойством, что циркуляция $\mathbf{v}$ по краю всякой "бесконечно малой площади", содержащей $r$, равна нулю:

$$d\omega^1(r, \eta) = 0 \quad \forall\eta.$$

Действительно, $d\omega^1(r, \eta) = \det(r, r, \eta) = 0$. Переход от 2-формы $\omega^2 = d\omega^1$ к полю ротора $r$- не инвариантная операция: оно зависит от евклидовой сируктуры $R^3$. Однако направление ротора $r$(т.е. неориентированная прямая с направляющим вектором $r$ в $TR^3$) инвариантно связано с 2-формой(и значит с 1-формой $\omega^1$). Действительно, легко проверить что если $r \neq 0$, то направление $r$ определяется условием $\{\omega^2(r, \eta) = 0,\ \forall\eta\}$ однозначно. Алгебраической основой многомерной леммой Стокса является существование оси у всякого вращения нечетного пространства.

Лемма 0.18: Пусть $\omega^2$- алгебраическая внешняя 2-форма в нечетномерном векторном пространстве $R^{2n+1}$. Тогда существует вектор $\xi \neq 0$ такой, что

$$\omega^2(\xi, \eta) = 0, \quad \forall\eta \in R^{2n+1}$$

**Доказательство.** Кососимметрическая форма $\omega^2$ задается кососимметрической матрицей $A$

$$\omega^2(\xi, \eta) = (A\xi, \eta)$$

нечетного порядка $2n + 1$. Определитель такой матрицы равен нулю, так как

$$A' = -A, \quad \det A = \det A' = \det(-A) = (-1)^{2n+1} \det A = -\det A$$

Итак, определитель $A$ равен нулю. Значит $A$ имет собственный вектор $\xi \neq 0$ с собственым значением 0.
Вектор $\xi$, для которого $\omega^2(\xi, \eta) \equiv 0, \quad \forall \eta$, называется нулевым вектором формы $\omega^2$. Очевидно, все нулевые векторы $\omega^2$ образуют векторное подпространство. Форма называется неособой, если размерность этого пространства-минимально возможная(т.е. 1-в нечетномерном пространстве $R^{2n+1}$, 0 в четномерном.)
**Задачи.**

1. Рассмотрим в четномерном пространстве $R^{2n}$ с координатами $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n$ 2-форму $\omega^2 = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n$. Докажите, что форма $\omega^2$ неособая(размерность нулевого подпространства равна нулю, поскольку для стандартной 2-формы

$$\int\int_\sigma \omega^2 = \sum_{j=1}^{n} |\sigma_{ij}| > 0,$$

где $|\sigma_{ij}|-$ площадь проекции $\sigma$ на плоскость $(p_j, q_j)$).

2. Рассмотрим в нечетномерном пространстве $R^{2n+1}$ с координатами $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t$ 2-форму $\omega^2 = dp_1 \wedge dq_1 + \dots + dp_n \wedge dq_n - \omega^1 \wedge dt$, где $\omega^1$ любая 1-форма в $R^{2n+1}$. Докажите форма $\omega^2$ неособая.

Если $\omega^2$ неособая форма в нечетномерном пространстве $R^{2n+1}$, то все нулевые вектора $\xi$ форма $\omega^2$ лежат на одной прямой. Эта прямая инвариантно связана с формой $\omega^2$.
Пусть теперь $M^{2n+1}$-нечетномерное дифференцируемое меногообразие, $\omega^1$- 1-форма на $M$. По предыдущей лемме в каждой точкп $x \in M$ имеется направление(т.е. прямая $\{c\xi\}$ в касательном пространстве $TM_x$), обладающее тем свойством, что интеграл $\omega^1$ по краю "бесконечно малой площадки, содержащей это направление", равен нулю

$$d\omega^1(\xi, \eta) = 0, \quad \forall \eta \in TM_x.$$

Пусть 2-форма $d\omega^1$ неособая. Тогда направление $\xi$ определено однозначно. Мы назовем его "направлением ротора"формы $\omega^1$. Интегральные кривые поля ротора называются линиями ротора(или характеристиками) формы $\omega^1$. Пусть $\gamma_1$- замкнутая кривая на $M$. Линии ротора, выходящие из точек $\gamma_1$ образуют "трубку ротора".

Лемма 0.19 (Многомерная лемма Стокса): Интеграл 1-формы по любой из двух кривых, охватывающих одну и ту же трубку ротора, одинаков $\oint_{\gamma_1} \omega^1 = \oint_{\gamma_2} \omega^1$, если $\gamma_1 - \gamma_2 = \partial\sigma$, где $\sigma-$ кусок трубки ротора.

Имеем

$$\oint_{\gamma_1} \omega^1 - \oint_{\gamma_2} \omega^1 = \oint_{\partial\sigma} \omega^1 = \int_\sigma d\omega^1$$

но значение $d\omega^1$ на любой паре векторов, касательных к трубке ротора, равно нулю.(Действительно эти два вектора лежат в 2-плоскости, проходящей направление ротора, а на этой плоскости $d\omega^1$ обращается в 0).

**Каноническое уравнение Гамильтона.** Из леммы Стокса непосредственно вытекают все основные положения гамильтоновой механики. Рассмотрим в качестве $M^{2n+1}$ "расширенное фазовое пространство" $R^{2n+1}$ с координатами $p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n, t$. Пусть дана функция $H = H(p, q, t)$. Тогда можно составить 1-форму

$$\omega^1 = pdq - Hdt$$

(форма $\omega^1$ кажется взятой с потолка. Мы увидем в следующем параграфе, как идея рассмотреть эту форму возникла из оптики). Применим к $\omega^1$ лемму Стокса

Теорема 0.50: Линии ротора $\omega^1 = pdq - Hdt$ в $2n+1$ мерном расширенном фазовом пространстве $p, q, t$ однозначно проектируются на ось $t$, т.е. задаются функциями $p(t), q(t)$. Эти функции удовлетворяют системе канонических дифференциальных уравнений с функцией Гамильтона $H$:

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{98}$$

Иными словами, линия ротора формы $pdq - Hdt$ суть траектории фазового потока в расширенном пространстве, т.е. интегральные кривые канонических уравнений (98)

Дифференциал формы $pdq - Hdt$ равен

$$d\omega^1 = \sum_{j=1}^{n} (dp_j \wedge dq_j - \frac{\partial H}{\partial p_j} dp_j \wedge dt - \frac{\partial H}{\partial q_j} dq_j \wedge dt)$$

Из этого выражения видно, что матрица 2-формы в координатах $p, q, t$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -E & H_p \\ E & 0 & H_q \\ -H_p & -H_q & 0 \end{pmatrix}, \quad H_p = \frac{\partial H}{\partial p}, \ H_q = \frac{\partial H}{\partial q}$$

$E-$ диничная матрица порядка $n$. Ранг этой матрицы равен $2n$(левый верхний угол невырожденый), поэтому 2-форма $d\omega^1$ неособая. Вектор $(-H_q, H_p, 1)-$ собственный вектор матрицы $A$ с нулевым собственным значением. Значит он задает направление линий ротора формы $pdq - Hdt$. Но вектор $(-H_q, H_p, 1)-$ есть как раз вектор скорости потока (98). Итак, интегральные кривые суть линии ротора формы $pdq - Hdt$.

**Теорема об интегральном инварианте Пуанкаре-Картана.**

Теорема 0.51: Пусть две замкнутые кривые $\gamma_1, \gamma_2$ охватывают одну и ту же трубку фазовых транеторий (98). Тогда интегралы формы $pdq - Hdt$ по ним одинаковы

$$\oint_{\gamma_1} pdq - Hdt = \oint_{\gamma_2} pdq - Hdt.$$

Форма $pdq - Hdt$ называется интегральным инвариантом Пуанкаре-Картана.

Рассмотрим, в частности, кривые, составленные из одновременных состояний, т.е. лежащие в плоскости $t = \mathrm{const}$. Вдоль таких кривых $dt = 0$ и $\oint pdq - Hdt = \oint pdq$

Следствие 0.12: Фазовый поток сохраняет интеграл формы $pdq$ по закнутым кривым.

**Доказательство.** Пусть $g_{t_0}^{t_1} : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ преобразование фазового пространства $(p, q)$, осуществляемое фазовым потоком за время от $t_0$ до $t_1$(т.е. $g_{t_0}^{t_1}(p_0, q_0)$ есть решение канонических уравнений (98) с начальными условиями $p(t_0) = p_0,\ q(t_0) = q_0$). Пусть $\gamma-$ любая замкнутая кривая в пространстве $\mathbf{R}^{2n} \subset \mathbf{R}^{2n+1},\ t = t_0$. Тогда $g_{t_0}^{t_1}$ есть закнутая кривая в пространстве $\mathbf{R}^{2n},\ t = t_1$, охватывающая ту же трубку фазовых траектория в $\mathbf{R}^{2n+1}$. По предыдущей теореме, так как $dt = 0$ на $\gamma$ и на $g_{t_0}^{t_1}\gamma$. Находим $\oint_\gamma pdq = \oint_{g_{t_0}^{t_1}\gamma} pdq$.

Форма $pdq$ называется относительным интегральным инвариантом Пуанкаре. Он имеет простой геометрический смысл. Пусть $\sigma-$ двумерная ориентированная церь, $\gamma = \partial\sigma$. Тогда по формуле Стокса

$$\oint_\gamma pdq = \int\int_\sigma dp \wedge dq.$$

Итак доказано важное

Следствие 0.13: Фазовый поток сохраняет сумму ориентированных площадей проекции поверхности на $n$ координатных плоскостей $(p_j, q_j)$

$$\int\int_\sigma dp \wedge dq = \int\int_{g_{t_0}^{t_1}\sigma} dp \wedge dq$$

Иными словами, 2-форма $\omega^2$ $\omega^2 = dp \wedge dq$ является абсолютным интегральным инвариантом фазового потока.

**Пример.** При $n = 1$ $\omega^2$ есть площадь, и мы получаем теорему Лиувилля: фазовый поток сохраняет площадь(несжимаемого потока).

**Канонические отображения.** Пусть $g-$ дифференцируемое отображение фазового пространства $\mathbf{R}^{2n} = \{(p, q)\} \to \mathbf{R}^{2n}$

Определение 0.17: Отображение $g$ называется каноническим, если $g$ сохраняет 2-форму $\omega^2 = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq_j$.

Из предыдущих рассуждений видно, что это определение можно записать в любом из трех эквивалентных видов:

1) $g^*\omega^2 = \omega^2$ ($g$ сохраняет 2-форму $\omega^2 = \sum_{j=1}^n dp_j \wedge dq_j$);

2) $\int_\sigma \omega^2 = \int\int_{g\sigma} \omega^2\ \forall\sigma$ ($g$ сохраняет сумму площадей проецкций любой поверхности);

3) $\oint_\gamma pdq = \oint_{g\gamma} pdq$ (форма $pdq$-относительный интегральный инвариант фазового потока $g$).

**Задача.** Покажите, что определения 1), 2) эквивалентны 3), если речь идет об отображении односвязной области в фазовом пространстве $\mathbf{R}^{2n}$; в общем случае 3) $\to$ 2) $\to$ 1).

Предыдущие следствия теперь можно сформулировать так:

Теорема 0.52: Преобразование фазового пространства, осуществляемое фазовым потоком, каноническое.

**Следствия из теоремы об интегральном инварианте Пуанкаре-Картана.** В этом параграфе мы докажем, что канонические преобразования сохраняют вид уравнений Гамильтона, что один первый интеграл уравнений Гамильтона позволяет понизить порядок системы сразу на **две** единицы, покажем что движение в лпгранжевой натуральной системе происходит по неодезическим конфигурационного пространства, снабженного некоторой римановой метрикой.

**Замена переменных в канонических уравнениях.** Из инвариантности связи формы $pdq - Hdt$ с ее линиями ротора вытекает способ писать уравнения движения в любой системе $2n+1$ координат в расширенном фазовом пространстве $\{(p, q, t)\}$. Пусть $x_1, x_2, \dots, x_{2n+1}$)- координатные функции в некоторой карте расширенного фазового пространства(рассматриваемого как многообразие $M^{2n+1}$(см. рис. 184). Координаты $(p, q, t)$ модно рассматривать как задающие другую карту $M$. Форму $\omega^1 = pdq - Hdt$ можно рассматривать как дифференциальную 1-форму на $M$. С этой формой инвариантным(не зависящим от карт) образом связано семейство линий на $M$- линий ротора. На карте $(p, q, t)$ эти линии изображаются траекториями фазового потока

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{99}$$

с функцией Гамильтона $H(p, q, t)$. Пусть форма $\omega^1$ в координатах $x_1, \dots, x_{2n+1}$) записывается в виде

$$pdq - Hdt = X_1 dx_1 + \dots + X_{2n+1} dx_{2n+1}$$

Теорема 0.53: На карте $(x_i)$ траектории (99) изображаются линиями ротора формы $\sum X_i dx_i$.

**Доказательство.** Линии ротора формы $\sum X_i dx_i$ и $pdq - Hdt$ суть изображения на двух разных картах ротора одной и тойже формы на $M$. Но интегральные кривые (99) суть линии ротора $pdq - Hdt$. Значит, их образы на карте $(x_i)$ суть линии ротора формы $\sum X_i dx_i$.

Следствие 0.14: Пусть $(P_1, \dots, P_n; Q_1, \dots, Q_n; T)$ локальная система координат в расширеном фазовом пространтве $(p, q, t)$ и $K(P, Q, t)$, $S(P, Q, t)-$ такие функции, что

$$pdq - Hdt = PdQ - KdT + dS$$

(левая и правая части суть формы на расширенном фазовом пространстве). Тогда траектории фазового потока (99) изображаются на карте $(P, Q, t)$ интегральными кривыми канонических уравнений

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{\partial K}{\partial Q}, \quad \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial K}{\partial P} \tag{100}$$

**Доказательство.** По предыдущей теореме траектории (99) изображаются линиями ротора форма $PdQ - KdT + dS$. Но $dS$ на линии ротора не влияет(так как $ddS = 0$). Поэтому изображение траектории (99) суть линии ротора формы $PdQ - KdT$. Согласно параграфу **Каноническое уравнение Гамильтона** линии ротора такой формы суть интегральные кривые канонических уравнений (100).
В частности,

Теорема 0.54: Пусть $g : \mathbf{R}^{2n} \to \mathbf{R}^{2n}$ каноническое преобразование фазового пространства, переводящее точку с координатами $(p, q)$ в точку с координатами $(P, Q)$. Функции $P(p, q)$, $Q(p, q)$ можно рассматривать как новые координаты в фазовом пространстве. В новых координатах $(P, Q)$ канонические уравнения (99) имеют канонический вид (100) со старой функцией Гамильтона $K(P, Q, t) = H(p(P, Q), q(P, Q), t)$.

**Доказательство.** Чтобы доказать этот факт, рассмотрим в фазовое пространство 1-форму $pdq - PdQ$ в $\mathbf{R}^{2n}$.

1) Так как $g$-каноническое преобразование, то $dP \wedge dQ = g^*(dp \wedge dq) = dp \wedge dq$, отсюда для любой замкнутой критвой $\gamma$ имем

$$\oint_\gamma pdq - PdQ = \oint_\gamma pdq - \oint_\gamma PdQ = \int_\sigma dp \wedge dq - \int_\sigma dP \wedge dQ = 0$$

где $\partial\sigma = \gamma_1 - \gamma_2$. Поэтому $\int_{p_0,q_0}^{p_1,q_1}(pdq - PdQ) = S$ не зависит от пути интегрирования, но зависит от конечной точки $(p_1, q_1)$(при фиксированной начальной точке $(p_0, q_0)$). Итак, $dS(p, q) = pdq - PdQ$.

2) Пусть $d$ дифференциал в фазовом пространстве, $D = (d, dt)$-дифференциал в расширенном фазовом пространстве. Тогда $DS = dS$. Следовательно, в расширенном фазовом пространстве

$$pdq - Hdt = PdQ - Hdt + DS.$$

Теперь можно применить предыдущая теорема (0.53). Итак, при каноническом преобразовании функция Гамильтона остается старой.

## Лекция 18. Интегрирования канонических уравнений.

**Понижение порядка с помошью интеграла инергии.** Пусть теперь функция Гамильтона $H(h, q)$ автономна, т.е. не зависит от времени. Тогда канонические уравнения

$$\frac{d}{dt}p = -\partial_q H, \quad \frac{d}{dt}q = \partial_p H$$

имеют первый интеграл $H(q(t), p(t)) = \mathrm{const}$. С помощью этого интеграла можно понизить размерность пространства $(2n+1)$ на две единицы, сведя задачу к интегрированию некоторой системы канонических уравнений в $(2n-1)$ мерном пространстве. Отметим, что для обычной системы $N$ ОДУ один первый интеграл позволяет понизить размерность пространства $(N + 1)$ на одну единицу.

**Первые интегралы.** Первые интегралы $v_1(t, x), \ldots, v_k(t, x)$ системы

$$x_j' = f_j(t, x_1, \ldots, x_n), \quad j = 1, \ldots, n, \quad (t, x) \in D_0, \ f_1, \ldots, f_n \in C^1, \tag{101}$$

(любое $v_j(t, x(t)) = c_j$ постояенно вдоль траектории этой системы) называются **независимыми** в области расширенного пространства $D \subset \mathbf{R}^{n+1}$, если в каждой точке этой области ранг матрицы $(\partial v_i/\partial x_j)_{i=1,\ldots,k;j=1,\ldots,x_n}$ равен $k$. Напомним терему о неявных функциях:

Теорема 0.55: Дана система уравнений

$$\varphi_i(y_1, \ldots, y_n; z) = 0, \quad i = 1, \ldots, n, \quad z \in \mathbf{R}^m, \ m \geq 1. \tag{102}$$

Функции $\varphi_i \in C^1$ в окрестности точки $M = (y_1^0, \dots, y_n^0, z = z_0)$, а в этой точке равенства (102) выполняются и якобиан $\det(\partial\varphi_j/\partial y_j)_{i,j=1,\dots,n} \neq 0$. Тогда в некоторой окрестности точки $z_0$ систему (102) можно разрешить относительно $y_1, \dots, y_n$, точнее, существуют такие непрерывные функции $y_1(z), \dots, y_n(z)$, что для $i = 1, \dots, n$

$$\varphi_i(y_1(z), \dots, y_n(z); z) \equiv 0, \quad y_i(z_0) = y_i^0, \ i = 1, \dots, n.$$

Такая система функций $y_1(z), \dots, y_n(z)$ единственна и $y_j \in C^1, \ i = 1, \dots, n$.

Теорема 0.56: В окрестности любой точки $M = (t^0, x_1^0, \dots, x_n^0)$ области $D_0$ существует $n$ независимых интегралов системы (101).

Действительно, для любой точки $t^0, c_1, \dots, c_n) \in D_0$ по локальной теореме существования существует единственное проходящее через эту точку решение системы (101):

$$x_i = \varphi_i(t, c_1, \dots, c_n), \quad \varphi_i \in C^1, \quad i = 1, \dots, n. \tag{103}$$

Так как

$$\varphi_i(t^0, c_1, \dots, c_n) = c_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

То при $t = t^0$ матрица $(\partial\varphi_i/\partial c_j)_{i,j=1,\dots,n}$–единичная. По теореме о неявной функции систему (103) можно разрешить относительно $c_1, \dots, c_n$ в некоторой окрестности точки $M$

$$c_i = v_i(t, x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n. \tag{104}$$

Покажем, что функции $v_i$ независимые первые интегралы системы (101). По теореме о неявных функциях $v_i \in C^1$. Числа $c_1, \dots, c_n$ одни и теже во всех точках интегральной кривой, проходящей через точку $(t^0, c_1, \dots, c_n)$. Значит функции $v_i$ постоянны вдоль интегральных кривых и явля ются первыми интегралами. При любом фиксированном $t$(вблизи $t^0$) системы (103), (104) взаимно обратимы, поэтому

$$\Delta_1 \cdot \Delta_2 = 1,$$

$$\Delta_1 = \det(\partial\varphi_i/\partial c_j)_{i,j=1,\dots,n}, \quad \Delta_2 = \det(\partial v_i/\partial x_j)_{i,j=1,\dots,n}$$

значит $\Delta_2 \neq 0$, т.е. ранг матрицы $(\partial v_i/\partial x_j)_{i,j=1,\dots,n}$ равен $n$ и первые интегралы $v_1, \dots, v_n$ независимы. Приведем еще две теоремы как задачи:

Теорема 0.57 (о получении решения с помощью первых интегралов.): Пусть $v_1, \dots, v_n$ независимые первые интегралы системы (101) в области $D$. Пусть точка $M = (t^0, x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$ и $c_i = v_i(M), \ i = 1, \dots, n$. Тогда решение системы (101) с начальными условиями $x_i(t^0) = x_i^0, \ i = 1, \dots, n$, определяется, как неявная функция, системой уравнений

$$v_i(t, x_1, \dots, x_n) = c_i, \quad i = 1, \dots, n. \tag{105}$$

Теорема 0.58: Если $v_1, \dots, v_n$ независимые первые интегралы системы (101) в окрестности $U$ точки $M^* = (t^0, x_1^*, \dots, x_n^*)$, то любой первый интеграл $w$ системы (101) в некоторой окрестности точки $M^*$ является функцией от них, т.е. $w = F(v_1, \dots, v_n), \quad F \in C^1$.

**Понижение порядка для системы Гамильтона.** Теперь рассмотрим каноническую систему с автономной функции Гамильтона $H(h, q)$, не зависящей от времени:

$$\frac{d}{dt}p = -\partial_q H, \quad \frac{d}{dt}q = \partial_p H \tag{106}$$

имеют первый интеграл $H(q(t), p(t)) = \mathrm{const}$. Предположим, что(в некоторой области $\Omega \subset R^{2n}$) уравнение

$$h = H(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n)$$

можно разрешить относительно $p_1$;

$$p_1 = K(P, Q, T; h), \quad P = (p_2, \ldots, p_n), \; Q = (q_2, \ldots, q_n),$$

где $T = -q_1$. Тогда находим

$$pdq - Hdt = PdQ - KdT - d(Ht) + tdH.$$

Пусть теперь $\gamma-$ интегральная кривая канонического уравнения, лежащая на $2n$ мерной поверхности $H(p, q) = h$ в $R^{2n+1}$. Тогда $\gamma$ есть линия ротора формы $pdq - Hdt$. Спроектируем расширенное фазовое пространство $R^{2n+1} = \{(p, q, t)\}$ на фазовое пространство $R^{2n} = \{(p, q)\}$. Цилиндрическая поверхность $H = h$ спроектируется в $2n-1$ мерное подмногообразие $M^{2n-1}: \; H(p, q) = h$ в $R^{2n}$, а кривая $\gamma$–в кривую $\overline{\gamma}$, лежащую на этом подмногообрази. Величины $P, Q, T$ образуют локальные координаты в $M^{2n-1}$.
**Задача.** Докажите, что кривая $\overline{\gamma}$ является линией ротора формы $pdq = PdQ - KdT$ на $M^{2n-1}$.($d(Ht)$ не влияет на линии ротора, а $dH$ на $M$ есть нуль.
Но линии ротора формы $PdQ - KdT$ удовлетворяютуравнениям Гамильтона

$$\frac{d}{dT}P = -\partial_Q K, \quad \frac{d}{dT}Q = \partial_P K.$$

Итак, доказана

Теорема 0.59: Фазовые траектории уравнений (107) на поверхности $M^{2n-1} = \{(p, q), \; H = h\}$ удовлетворяют каноническим уравнениям

$$\frac{d}{dq_1}p_i = -\partial_{q_i} K, \quad \frac{dq_i}{dq_1} = \partial_{p_i} K, \quad i = 2, \ldots, n, .$$

где функция $K(p_2, \ldots, p_n; q_2, \ldots, q_n; T, h)$ определяется из уравнения

$$H(K, p_2, \ldots, h_n; -T, q_2, \ldots, q_n) = h.$$

Итак, мы доказали существрвание системы независимых первых интегралов локально и исследовали их свойства. Вопрос в том, когда первые интнгралы существуют глобально. Чтобы перейти к этой проблеме, нам потребуется ввести новые элементы математического языка.

**Метод Якоби-Гамильтона интегрирования канонических уравнений.** Метод Якоби-Гамильтона состоит в нахождении специальной замены координат (канонической замены координат), которая

1) сохраняет канонический вид уравнений движения, а также функцию Гамильтона.

2) приводит функцию Гамильтона к такому(простейшему) виду, что канонические уравнения удается проинтегрировать в квадратурах(тем самым мы проинтегрируем исходные уравнения).

Задача построения такого канонического преобразования сводится к отысканию достаточно большого числа решений уравнения Гамильтона-Якоби в частных производных. Этому уравнению должна удовлетворять производящая функция искомого канонического преобразования, по которой мы определяем требуемое нам каноническое преобразование.

**Производящая функция.** Пусть $2n$ функций $P(p,q), Q(p,q)$ от $2n$ переменных $p,q$ задают каноническое преобразование $g: \ R^{2n} \to R^{2n}$. Тогда, как мы показали в предыдущей лекции, 1-форма $pdq - PdQ$ есть полный дифференциал

$$pdq - PdQ = dS(p,q). \tag{107}$$

Предположим теперь, что в окрестности некоторой точки $(p_0,q_0)$ за независимые координаты можно принять $(Q,q)$. Иными словами, предположим, что отличен от нуля якобиан

$$\det \frac{\partial(Q,q)}{\partial(P,p)}|_{(p_0,q_0)} = \det \frac{\partial Q}{\partial p} \neq 0$$

в точке $(p_0,q_0)$. Такие канонические преобразования называются **свободными.** Тогда, в частности, функцию $S$ можно выразить через эти координаты

$$S(p,q) = S_1(Q,q)$$

Определение 0.18: Функция $S_1(Q,q)$ называется производящей функцией нашего канонического преобразования $g$.

Подчеркнем, что $S_1$ не есть функция в фазовом пространстве $R^{2n}$, она есть функция заданная в прямом произведении $R^n_q \times R^n_Q$, точки которого $(q,Q)$. Из (107) следует, что

$$\frac{\partial S_1(Q,q)}{\partial q} = p, \quad \frac{\partial S_1(Q,q)}{\partial Q} = -P \tag{108}$$

Оказывается, и обратно, всякая функция $S_1(Q,q)$ системой уравнений (108) задает каноническое преобразование $g$.

Теорема 0.60: Пусть $S_1(Q,q)$- функция, заданная в окрестности некоторой точки $(Q_0,q_0)$ прямого произведения $R^n_q \times R^n_Q$. Если

$$\det \frac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q}|_{(Q_0,q_0)} \neq 0,$$

то функция $S_1$ является производящей функцией некоторого свободного канонического преобразования.

**Доказательство.** Рассмотрим уравнение относительно координат $Q$

$$\frac{\partial S_1}{\partial q} = p,$$

которое разрешимо по теореме о неявных функциях и определяет в окрестности точки $(q_0, p_0 = \frac{\partial S_1(Q_0, q_0}{\partial q})$ функцию $Q(p,q)$ $(Q(p_0, q_0) = Q_0)$. Рассмотрим теперь функцию $P_1(Q,q) = -\frac{\partial}{\partial Q} S_1(Q,q)$ и положим

$$P(p,q) = P_1(Q(p,q), q).$$

Тогда локальное отображение $g: \ R^{2n} \to R^{2n}$, переводящее точку $(p,q)$ в точку $(P(p,q), Q(p,q)$ будем каноническим с производящей функцией $S_1$, ибо по построению

$$pdq - PdQ = \frac{\partial S_1(Q,q)}{\partial q} dq + \frac{\partial S_1(Q,q)}{\partial Q} dQ = dS_1$$

Оно свободно, так как

$$\det \frac{\partial Q}{\partial p} = \det(\frac{\partial^2 S_1}{\partial Q \partial q})^{-1} \neq 0.$$

Преобразование $g: \ R^{2n} \to R^{2n}$ задается вообоше $2n$ функциями от $2n$ переменных. Мы видим, что каноническое преобразование задается всего одной функцией $2n$ переменных–своей производящей функцией. Однако, не любое каноническое преобразование является свободным. Например тождественное преобразование $Q = q, \ P = p$, очевизно, не свободно.

**Уравнения Гамильтона-Якоби для производящей функции.** Заметим, что канонические уравнения, в которых функция Гамильтона $H$ зависит лишь от переменных $q$, легко проинтегрировать. В этом случае $H(p,q) = K(Q)$, ттогда уравнения Гамильтона

$$\overset{\circ}{Q} = 0, \quad \overset{\circ}{P} = \frac{\partial K(Q)}{\partial Q},$$

откуда

$$Q(t) = Q(0), \quad P(t) = P(0) + t \frac{\partial K(Q(0))}{\partial Q}.$$

Будем искать канонические преобразования, приводяшие функцию Гамильтона $H(p,q)$ к виду $K(Q)$. С этой целью будем искать производящую функцию $S(Q,q)$ такого преобразования. Из (108 ) мы получаем условие

$$H(\frac{\partial S(Q,q)}{\partial q}, q, t) = K(Q), \tag{109}$$

где после дифференцировния вместо $q$ следует подставить $q(P,Q)$. Заметим, что при фиксированном $Q$ уравнение (109) имеет вид так называемого стационарного уравнения Гамильтона-Якоби.

Теорема 0.61 (Теорема Якоби.): Если найдено решение $S(Q,q)$ уравнеия (109), зависящее от $n$ параметров $Q_i$( $n$ параметрическое семейство решений (109) или полный интеграл уравнения (109)) и такое, что

$$\frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial q} \neq 0,$$

то канонические уравнения

$$\overset{\circ}{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \overset{\circ}{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{110}$$

решаются явно в квадратурах. При этом функции $Q(p,q)$, определяемые уравнением

$$\frac{\partial S(Q,q)}{\partial q} = p,$$

являются $n$ первыми интегралами системы (110).

**Доказательство.** Рассмотрим каноническое преобразование с производящей функцией $S(Q,q)$. Согласно (108) $p = \partial S(Q,q)/\partial q$, откуда находим $Q = Q(p,q)$. Вычислим функцию $H(p,q)$ в новых координатах $P,Q$. Имеем $H(p,q) = H(\frac{\partial S(Q,q)}{\partial q}, q)$. Чтобы найти функцию Гамильтона в новых координатах, надо подставить в это выражение(после дифференцирования) вместо $q$ его выражение через $P,Q$. Однако, согласно (109), это выражение от $q$ вовсе не зависит, так что просто

$$H(p,q) = K(Q).$$

Таким образом, в новых переменных уравнение (110) примет интегрируемый вид.

Теорема Якоби сводит решение системы ОДУ (110) к отысканию полного интеграла уравнения в частных производных (109). Может показаться удивительным, что такое сведение более простого к более сложному доставляет эффективный метод решения конкретных задач. Между тем оказывается, что это–самый сильный из существующих методов точного интегрирования, и многие задачи, решенные Якоби, вообще не поддаются решению другими методами. Примеры существования решения уравнения (109) мы рассмотрим на практических занятиях.

**Производящие функции.** Выше мы ввели свободное каноническое преобразование, когда за $2n$ независимых координат можно принять $Q,q$. В этом случае функцию $S(pdq - PdQ = dS)$, выраженная через $Q,q$ мы назвали производящей фукнкцией $S_1(Q,q)$. Зная эту единственную функцию $s_1$, можно найти все $2n$ функций, задающих преобразование из соотношений

$$p = \frac{\partial S_1(Q,q)}{\partial q}, \quad P = -\frac{\partial S_1(Q,q)}{\partial Q}. \tag{111}$$

Однако, тождественное преобразование нельзя задать производящей функцией $S_1(Q,q)$, но можно перейти к производящей функции иного вида посредством преобразования Лежандра. Пусть, например, за независимые локальные координаты в $R^{2n}$ можно принять $P,q$( т.е. $\det(\partial(P,q)/\partial(p,q)) \neq 0$). Тогда имеем

$$pdq - PdQ = dS \Rightarrow \quad pdq + QdP = d(PQ + S)$$

Величина $S_2(P,q) = PQ + S(p,q)$ выраженная через $(P,q)$ также называется производящей функцией. Для этой функции

$$p = \frac{\partial S_2(P,q)}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial S_2(P,q)}{\partial P}. \tag{112}$$

Обратно, если $S_2(P,q)$-производящая функция, для которой

$$\det(\frac{\partial^2 S_2(P,q)}{\partial q \partial P}) \neq 0,$$

тогда в окрестности точки $(p_0 = \frac{\partial S_2(P_0,q_0)}{\partial q},\ q_0)$ можно разрешить первую группу уравнений (112) относительно $P$ и получить функции $P(p,q),\ (P(p_0.q_0) = P_0)$. После этого вторая группа уравнений (112) определяет $Q(p,q)$ и отображение $(p,q) \to\ (P,Q)$-каноническое.

**Задачи.**

1) Доказать это утверждение.

2) Найти $S_2$ для тождественного отображения $P = p,\ Q = q$. $S_2 = Pq$.
Здесь $Q = \partial S_2/\partial P = q,\ p = \partial S_2/\partial q = P$.

Переменные $P, q$ не всегда могут быть выбраны за локальные координаты. Однако всегда можно выбрать некоторый набор $n$ координат
$P_i = (P_{i_1}, \ldots, P_{i_k}),\ Q_j = (Q_{j_1}, \ldots, Q_{j_{n-k}})$ так, что вместе со старыми $q$ мы получим $2n$ независимых координат. Здесь $(i_1, \ldots, i)k)\ (j_1, \ldots, j_{n-k})-$ любое разбиение множества $(1, \ldots, n)$ на две непересекающиеся части, так что всего $2^n$ случаев.

Теорема 0.62: Пусть $g:\ R^{2n} \to R^{2n}$ каноническое преобразование, заданное функциями $P(p,q), Q(p,q)$. В окрестности каждой точки $(p_0, q_0)$ можно принять за независимые кллодинаты в $R^{2n}$ по меньшей мере $2^n$ наборов функций $(P_i, Q_j, q)$

$$\det\frac{\partial(P_i, Q_j, q)}{\partial(p_i, p_j, q)} = \det\frac{\partial(P_i, Q_j)}{\partial(p_i, p_j)} \neq 0.$$

В окрестности такой точки можно восстановить каноническое преобразование $g$ по функции

$$S_3(P_i, Q_j, q) = (P_i, Q_i) + \int pdq - PdQ$$

из соотношений

$$p = \frac{\partial S_3}{\partial q}, \quad Q_i = \frac{\partial S_3}{\partial P_i}, \quad P_j = -\frac{\partial S_3}{\partial Q_j}. \tag{113}$$

Обратно, если $S_3(P_i, Q_j, q)$ любая функция, для которой отличен отнуля определитель $\det(\frac{\partial^2 S_3}{\partial R \partial q}) \neq 0,\ R = (P_i, Q_j)$, то соотношение (113) задает каноническое преобразование в окрестности точки $(p_0, q_0)$.

Доказательство см. Арнольд [1], стр. 211.

## Лекция 19. Интегрируемые системы.

Как мы показали выше, чтобы проинтегрировать систему $2n$ ОДУ надо знать $2n$ первых интегралов, в то время как для канонической системы ОДУ во многих случаях достаточно знать лишь $n$ первых интегралов–каждый из них позволяет понизить число переменных системы не на одну, а на две единицы. Наша задача–построение канонического преобразования приводящего к так называемым переменным действие-угол $(p,q) \to \ (I,\varphi)$, приводящей систему Гамильтона к интегрируемому в квадратурах виду:

$$\overset{\circ}{\varphi} = \omega(I), \quad \overset{\circ}{I} = 0,$$

когда

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \omega(I)t, \quad I(t) \equiv I(0).$$

**Задача.** Может ли функция $\omega(I)$ быть произвольной?(Нет).
поскольку в переменых $(I,\varphi)$ система Гамильтона имеет канонический вид с функцией гамильтона $K(I)$. Следовательно $\omega(I) = \partial_I K$. Поэтому при $n \geq 2$

$$\frac{\partial \omega_i}{\partial I_j} = \frac{\partial \omega_j}{\partial I_i},$$

т.е. мы имеем дополнительные связи на частоты.

Определение 0.19: Две функции $F_1, F_2$ находятся в инволюции, если их скобка Пуассона равна нулю.

Напомним, что функция $F$ –первый интеграл системы с функцией Гамильтона $H$ тогда и только тогда, когда скобка Пуассона

$$[H,F] = \partial_p H \partial_q F - \partial_q H \partial_p F \equiv 0$$

Отсюда для системы с двумя степенями свободы (фазовое пространство $(p,q),\ p,\ q \in R^n,\ n=2,$) любой первый интеграл находится в инволюции с $H$.

Лиувиль доказал, что если в системе с $n$ стененями свободы(т.е. $2n$ мерным фазовым пространством) известны $n$ независимых первых интегралов в инволюции, то **система интегрируема в квадратурах**(см. Арнольд [1], стр. 215-218).

Теорема 0.63 (Терема Лиувилля.): Пусть дано $n$ функций в инволюции

$$F_1, \ldots, F_n; \quad [F_i, F_j] \equiv 0, \quad i,j = 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим множество уровня функций $F_i$

$$M_f = \{x: \quad F_i(x) = f_i, \quad i = 1, \ldots\}.$$

Предположим, что на $M_f$ $n$ функций $F_i$ независимы(т.е. 1-формы $dF_i$ линейно независимы в каждой точке $M_f$). Тогда

1) $M_f$–гладкое многообразие, инвариантное относительно фазового потока $g^t$ с функцией Гамильтона $H = F_1$.

2) Если многообразие $M_f$ компактно и связно, то оно диффеоморфно $n-$ мерному тору

$$T^n = \{(\varphi_1, \dots, \varphi_n) \ (\mathrm{modd}\, 2\pi)\},$$

т.е. на $M_f$ можно ввести угловые координаты.

3) Фазовый поток $g^t$ с функцией Гамильтона $H$ определяет на $M_f$ условно-периодическое движение, т.е. в угловых координатах $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(f).$$

4) Канонические уравнения с функцией Гамильтона $H$ интегрируются в квадратурах.

Следствие 0.15: Если в канонической системе с двумя степенями свободы известен один первый интеграл $F$, не зависящий от функции Гамильтона $H$, то система интегрируемы в квадратурах; компактное связное двумерное подмногообразии фазового пространства $H = h, \ F = f$ есть инвариантный тор, а движение на нем условно периодично.

Действительно, $F$ и $H$ находятся в инволюции, так как $F-$ первый интеграл системы с функцией Гамильтона $H$.

Сформулированная выше теорема Лиувилля охватывает все проинтегрированные на сегодняшний день проблемы динамики. Заметим, что переход к переменным $(p, q) \to (F, \varphi)$ в теореме Лиувилля может быть не каноническим($dF \wedge d\varphi \neq p \wedge q$), не сохраняющим форму системы Гамильтона. Однако, во многих случаех справедливости теоремы Лиувилля существует замена первых интегралов $F = F(I)$ определяющее замену переменных $(F, \varphi) \to (I, \varphi)$, в которой преобразование $(p, q) \to (I, \varphi)$- каноническое($dI \wedge d\varphi = p \wedge q$). Такие переменные $I$ называются **переменными действия**(нетрудно сообразить, что $I$ имеет размерность действия). Приведем

**Пример.** Найдем переменные действие-угол в случае простейшего гармонического осциллятора $H = (p^2 + q^2)/2$. Если $r, \varphi-$ полярные координаты, то $dp \wedge dq = rdr \wedge d\varphi = d(r^2/2) \wedge d\varphi$. Поэтому $I = r^2/2 = H = (p^2 + q^2)/2$. Переменная действия $I$ есть энергия.

Теперь покажем, что в условиях теоремы Лиувилля можно выбрать такие координаты $(I, \varphi)$, что первые интегралы $F$ зависят только от $I$, а $\varphi$-угловыу координаты на торе $M_f$ и в переменных $(I, \varphi)$ фазовый поток

$$\overset{\circ}{p} = -\partial_q H(p, q), \quad \overset{\circ}{q} = \partial_p H(p, q) \tag{114}$$

с функцией Гамильтона $H(p, q) = F_1(p, q) = K(I)$ принимает на $M_f$ особенно простой вид:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \omega(f) = \partial_I K(I), \quad \frac{dI}{dt} = 0. \tag{115}$$

Таким образом, чтобы проинтегрировать исходную каноническую систему ОДУ достаточно в явном виде найти переменые $\varphi$. Оказывается, это возможно сделать, используя лишь квадратуры. Такое построение переменных $\varphi$ приведем ниже в случае одной степени свободы.

**Задача.** Пусть $n = 1$. Докажите, что многообразие $M_f$ имеет окрестность, диффеоморфную прямому произведению окружности(одномерного тора $T^1$ на шар $D^1$ 1-мерного евклидова пространства $R^1$.(Принять за координаты $F_1$ и угол $\varphi_1$ теоремы Лиувилля. Функции $F_1, \varphi_1$ задают диффеоморфизм окрестности $M_f$ на прямое произведение $T^1 \times D^1$).

**Построение переменных действие-угол в случае одной степени свободы.** Переменные $I$ вместе с угловыми переменными $\varphi$ образуют в окрестности $M_f$ систему канонических координат **действие-угол.** Величины $I_i$ являются первыми интегралами системы с функцией Гамильтона $H = F_1$ как функции $I = I(F)$ от первых интегралов $F_j$. В свою очередь переменные $F_j$ можно выразить через $I$, и, в частности, $H = F_1 = H(I)$. В переменых действие угол система нашего потока (114) имеют вид (115). Мы видели выше, что переменные действие-угол важны для теории возмущений. Ниже мы покажем их применение в терии адиабатических инвариантов. Теперь рассморим систему с одной степенью свободы на фазовой плоскости $(p, q)$ с функцией Гамильтона $H(p, q)$.

**Примеры.**

1) Гармонический осциллятор $H = (p^2 + q^2)/2$, или в оющем виде $H = (a^2p^2 + b^2q^2)/2$

2) Математический маятник $H = p^2/2 - \cos q$. Здесь фазовое пространство цилиндр $S^1 \times R^1$.

В обоих случаях имеются компактные замкнутые кривые $M_h$( линии уровня $H = h$), и мы находимся в условиях теоремы Лиувилля при $n = 1$. Чтобы построить переменные действия-угол, будем искать каноническое преобразование $(p, q) \to (I, \varphi)$, удовлетворяющее двум условиям

$$I = I(h), \quad \oint_{M_h} d\varphi = 2\pi. \tag{116}$$

Чтобы построить каноническое преобразование $p, q \to I, \varphi$ в общем случае, будем искать его производящую функцию $S_1(I, q)$ как решение стационарного уравнения Гамильтона-Якоби:

$$H(\frac{\partial S_1(I, q)}{dq}, q) = h(I) \tag{117}$$

так что само каноническое преобразования определяется соотношениями

$$p = \frac{\partial S_1(I, q)}{dq}, \quad \varphi = \frac{\partial S_1(I, q)}{dI}, \tag{118}$$

Предположим сначала, что функция $h(I)$ известна и обратима, так что каждая кривая $M_h$ определяется значением $I = I(h)(M_h = M_{h(I)})$. В силу каноничности преобразования имеем

$$pdq - \varphi dI = dS(p, q) = dS_1(I, q)$$

Тогда при фиксированном значении $I$ отсюда

$$dS_1|_{I=\text{const}} = pdq.$$

Это соотношение определяет на кривой $M_{h(I)}$ дифференциальную 1-форму $dS_1$. Интегрируя вдоль кривой $M_{h(I)}$ эту 1-форму, мы получим(в окрестности точки $q_0$) функцию

$$S_1(I,q) = \int_{q_0}^{q} pdq.$$

Эта функция и будет производящей функцией преобразования (118)
в окрестности точки $(I, q_0)$.

Первое из условий (116) выполнено автоматически: $I = I(h)$. Чтобы удовлетворить второму условию, рассмотрим поведение $S_1(I,q)$ "в целом". При обходе замкнутой кривой $M_{h(I)}$ интеграл $pdq$ получает приращение

$$\Delta S_1(I) = \oint_{M_{h(I)}} pdq,$$

равное площади $\Pi(I)$, ограниченной кривой $M_{h(I)}$. Поэтому функция $S_1-$ "многозначная функция"на кривой $M_{h(I)}$: она определена с точностью до прибавления целого кратного $\Pi$. На производную $\partial S_1(I,q)/\partial q$ это слагаемое не влияет; но оно приводит к неоднозначности переменной $\varphi = \partial S_1/\partial I$. Эта производная оказывается определенной лишь с точностью до слагаемого, кратного $d\Delta S_1(I)/dI$. Точнее говоря, формулы (118) определяют 1-форму $d\varphi$ на кривой $M_{h(I)}$ и интенграл этой формы по $M_{h(I)}$ равен $d\Delta S(I)/dI$. Чтобы выполнить второе из наших условий, $\oint_{M_h} d\varphi = 2\pi$, нужно, чтобы

$$\frac{d\Delta S(I)}{dI} = 2\pi \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\Delta S}{2\pi} = \frac{\Pi(h)}{2\pi},$$

где $\Pi = \oint_{M_h} dq-$ площадь, ограниченая фазовой кривой $H = h$. Таким образом, мы нашли форму введения переменной действия $I$ в случае одной степени свободы

Определение 0.20: Переменной действия в случае одной степени свободы с функцией Гамильтона $H(p,q)$ называется величина $H(h) = \Pi(h)/(2\pi)$.

Окончательно мы приходим к следующему выводу. Пусть $d\Pi/dh \neq 0$. Тогда определена обратная $I(h)$ функция $h(I)$.

Теорема 0.64: Положим

$$S(I,q) = \int_{q_0}^{q} pdq|_{H=h(I)}.$$

Тогда формулы (118) задают каноническое преобразование $p,q \to I,\varphi$, для которого производящая функция $S_1$ есть решение стационарного уравнения Гамильтона-Якоби

$$H(\frac{\partial S_1(I,q)}{\partial q}, q) = h(I),$$

удовлетворяющее (116)

Итак, переменные действие-угол в одномерном случае построены.

**Задача.** Найти $S$ и $I$ для гармонического осциллятора.
Если $H = (a^2p^2 + b^2q^2)/2$, то $M_h$- эллипс, ограничивающий площадь $\Pi(h) = \pi\sqrt{2h}/a \cdot \sqrt{2h}/b = 2\pi h/(ab) = 2\pi h/\omega$. Итак, для гармонического осциллятора переменные действие-угол $I = h/\omega(h)$ есть отношение энергии к частоте. Угловая переменая $\varphi-$ это конечно, фаза колебаний.

**Период.**Теперь докажем, что период $T$ дижения по замкнутой кривой $M_h = \{(p,q) : H = h\}$ на фазовой плоскости $(p,q)$ равен производной площади, ограниченной этой кривой, по $h$:

$$T = \frac{d\Pi(h)}{dh}.$$

Отсюда следует очевидность с физической точки зрения нашего условия $\frac{d\Pi(h)}{dh} \neq 0$ построения переменных $(I,\varphi)$ действие-угол.

В переменных действие-угол уравнения движения (114) дают

$$\overset{\circ}{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I} = (\frac{\partial I}{\partial h})^{-1} = 2\pi(\frac{\partial \Pi}{\partial h})^{-1},$$

отсюда

$$T = 2\pi/\overset{\circ}{\varphi} = d\Pi/dh.$$

**Адиабатические инварианты.** Рассмотрим гамильтонову систему с одной стеренью свободы, с функцией Гамильтона $H(p,q,\lambda)$, зависящей от параметра $\lambda$. Примером может служить маятник

$$H = \frac{p^2}{2l^2} + lg\frac{q^2}{2},$$

в качестве параметра $\lambda$ можно взять длину $l$ или ускорение силы тяжести $g$. Предположим что параметр со временем меняется медленно. В этом случае в пределе, когда скорость изменения параметра стремится к 0, появляется замечательное асимптотическое явление: две величины, вообще независимые, могут стать функциями одна другой. Предположим, например, что длина маятника медленно изменяется(по сравнению с его собственными колебаниями). Оказывается, амплитуда его колебаний становится тогда функцией длины маятника. Например, если очень медленно увеличить вдвое длину нити маятника, а затем очень медленно ее уменьшить до прежней величины, то в конце этого процесса амплитуда колебания станет такой же, какой была вначале. Более того, оказывается, отношение энергии маятника $H$ к частоте $\omega$ при медленном изменении параметров почти не меняется, хотя сами энергия и частота могут изменятся сильно.

Такие величины, которые мало меняются при медленном изменении параметров, физики назвали **адиабатическими инвариантами.** Легко сообразить, что адиабатическая инвариантность отношения энергии маятника к частоте есть утверждение физического характера, т.е. без дополнительных предположений **неверное**. Действительно, изменяя длину маятника сколь угодно медленно, но выбирая фазу колебаний, при которой длина увеличивается и уменьшается, можно раскачать маятник(параметрический резонанс). Чувствуя это, физики предложили формулировать определение адиабатического инваоианта так: лицо, меняющее параметры системы, не должно видеть, в каком состоянии находится система. Дать этому определению строгий математический смысл– весьма деликатная, до сих пор не решенная задача.

К счастью мы можем обойтись суррогатом, заменяя невмешательство лица, меняющего параметры, во внутренние дела системы требованием того, чтобы изменения параметров было плавным, а именно, два раза непрерывно дифференцируемым. Точнее, пусть $H(p,q;\lambda)$-фиксированная дважды дифференцируемая функция $\lambda$. Положим $\lambda = \varepsilon t$ и будем рассматривать полученную систему с медленно меняющимс параметром $\lambda = \varepsilon t$:

$$\overset{\circ}{p}= -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \overset{\circ}{p}= \frac{\partial H}{\partial p}, \quad H = H(p,q;\varepsilon t) \tag{119}$$

Определение 0.21: Величина $I(p,q;\lambda)$ называется адиабатическим инвариантом системы (119), если для всякого $\kappa > 0$ существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что если $0 < \varepsilon < \varepsilon_0,\ 0 < t < 1\varepsilon$, то

$$|I(p(t),q(t);\varepsilon t) - I(p(0),q(0);0)| < \ \kappa.$$

Очевидно, всякий первый интеграл является также адиабатическим инвариантом.

Оказывается, всякая одномерная система имеет адиабатический инвариант. А именно, адиабатическим инвариантом является переменная действия $I$. Предположим, что фазовые траектории системы с гамильтонианом $H(p,q;\lambda)$ **замкнуты.** Определим функцию $I(p,q;\lambda)$ следующим образом: При фиксированном $\lambda$ рассмотрим замкнутую фазовую траекторию $H = h$, проходящую через точку $(p,q)$. Она ограничивает на фазовой плоскости некоторую площадь $\Pi(h,\lambda)$. Переменную действия введем соотношением $\Pi(h,\lambda) = 2\pi I(h;\lambda)$. На каждой фазовой траектории(при данном $\lambda$) $I = \text{const}$.

Теорема 0.65: Если частота рассматриваемой системы (119) $\omega(h,\lambda)$ не обращается в 0, то $I(h;\lambda)$-адиабатический инвариант.

**Доказательство адиабатической инвариантности действия.** При фиксированном $\lambda$ в системе (119) можно ввести переменные действия-угол $I,\varphi$ какноническим преобразованием, зависящим от $\lambda$:

$$p,q \to \ I,\varphi$$

где

$$\overset{\circ}{\omega}= \omega(I,\lambda), \ \overset{\circ}{I}= 0, \quad \omega(I,\lambda) = \frac{\partial H_0}{\partial I}, \quad H_0 = H_0(I,\lambda)$$

Обозначим через $S(I,q;\lambda)$ производящую (многозначную) функцию этого преобразования:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad \varphi = \frac{\partial S}{\partial I}$$

Пусть теперь $\lambda = \varepsilon t$. Поскольку переход от переменых $p, q$ к переменным $I, \varphi$ совершается теперь зависящим теперь от времени каноническим преобразованием, уравнения движения в новых переменных $I, \varphi$ имеют гамильтонов вид, но с функцией Гамильтона

$$K = H_0 + \frac{\partial S}{\partial t} = H_0 + \varepsilon \frac{\partial S}{\partial \lambda} \tag{120}$$

Докажем это. Для этого нам нужно рассмотреть канонические преобразования $g(t)$, зависяшие от параметра $t$(времени).

**Неавтономный гамильтониан.** Рассмотрим каноническое преобразование, зависящее от параметра $t$: $g(t)(p,q) = (P(p,q,t), Q(p,q,t))$. Докажем, что канонические уравнения

$$\overset{\circ}{p} = -\partial_q H, \quad \overset{\circ}{q} = \partial_p H,$$

с неавтономной функцией Гамильтона $H(p,q,t)$, в переменных $P, Q, t$ имеет канонический вид с новой функцией Гамильтона $K(P,Q,t)$, где

$$K(P, \frac{\partial S}{\partial_P}, t) = \partial_t S + H(\partial_q S, q, t),$$

$$p = \partial_q S(P,q,t), \quad Q = \partial_P S(P,q,t).$$

Действительно, из каноничности $g(t)$ при фиксированном $t$ получим

$$pdq - PdQ = d_{p,q} S(p,q,t)$$

в фазовом пространстве $(p,q)$. В расширенном пространстве $R^{2n+1}$ получим

$$pdq - H(p,q,t)dt = PdQ - (H(p,q,t) + \partial_t S)dt + dS(p,q,t) =$$

$$= QdP - (H(p,q,t) + \partial_t S)dt + d(S(p,q,t) + PQ) = QdP - K(P,q,t)dt + dS_1(P,q,t)$$

Отсюда следует, что траектории ротора одинаковы и

$$p = \partial_q S_1(P,q,t), \quad Q = -\partial_P S_1(P,q,t), \quad \partial_t S_1(P,q,t) = K(P,q,t),$$

$$K(P,q,t) = H(p,q,t) + \partial_t S, \quad S_1(P,q,t) = S(p(P,q,t),q,t) + PQ(P,q,t)$$

Следовательно, система Гамильтона в новых переменных

$$\overset{\circ}{P} = -\partial_Q K(P,Q,t), \quad \overset{\circ}{Q} = \partial_P K(P,Q,t)$$

**Доказательство соотношения (120).** Теперь вернемся к доказательству (120). В переменных $(I, q, \lambda)$ функция $\partial S_1(I, q; \lambda)/\partial\lambda$–однозначная функция на фазовой плоскости(неоднозначность $S_1$ сводится к прибавлению кратных $2\pi I$).

Мы получаем, таким образом, уравнения движения в виде

$$\overset{\circ}{\omega} = \omega(I, \lambda) + \varepsilon f(I, \varphi; \lambda), \quad f = \frac{\partial^2 S}{\partial I \partial \lambda},$$

$$\overset{\circ}{I} = \varepsilon g(I, \varphi; \lambda), \quad g = -\frac{\partial^2 S}{\partial \varphi \partial \lambda},$$

$$\overset{\circ}{\lambda} = \varepsilon \quad .$$

Поскольку $\omega \neq 0$, применима теорема об усреднении лекции 16. Усредненная система имеет вид

$$\overset{\circ}{J} = \varepsilon \overline{g}, \quad \overset{\circ}{\Lambda} = \varepsilon.$$

Но $g = -\frac{\partial}{\partial \varphi}\frac{\partial S}{\partial \lambda}$, а $\frac{\partial S}{\partial \lambda}$– однозначная функция на окружности $I = \text{const}$. Поэтому $\overline{g} = (2\pi)^{-1}\int g d\varphi = 0$, и в усредненной системе $J$ не меняется вовсе:

$$J(t) \equiv J(0).$$

По тереме об усреднении

$$|I(t) - I(0)| < c\varepsilon, \quad 0 \leq t \leq 1/\varepsilon.$$

**Пример.** Для гармонического осциллятора $H = \frac{a^2}{2}p^2 + \frac{b^2}{2}q^2$, как мы показали выше

$$I = \frac{h}{\omega}, \quad \omega = ab,$$

т.е. адиабатическим инвариантом является отношение энергии к частоте.

# УПРАЖНЕНИЯ К ЛЕКЦИЯМ.

## Лекция-Упражнение 20. Квазилинейные уравнений. Метод характеристик.

Оставшиеся лекции мы используем как упражнения для формулировки алгоритмов решения уравнений с частными производными (УЧП) первого порядка. Приоритет этой темы обусловлен следующими обстоятельствами. В курсах общей и теоретической физики формируется, как известно, физическое представление о том, что классическая (геометрическая) оптика, классическая механика и классическая термодинамика являются предельными случаями соттветственно волновой оптики, квантовой механики и статистьической механики. Математическое обоснование соответствующего предельного перехода связано прежде всего с построением приближенных (асимптотических) решений УЧП, моделирующих всевозможные волновые процессы в сплошных средах. При определенных условиях на параметры волнового процесса и параметры среды(например, когда длина волны мала по сравнению с размерами рассматриваемых тел системы или по сравнению с параметрами неоднородной среды) в первом приближении, которое называется коротковолновым, фаза асимптотики волнового поля удовлетворяет нелинейному УЧП первого порядка–уравнению Гамильтона-Якоби для волновых фронтов. Следующее приближение приводит к линейному уравнению первого порядка для определения амплитуды колебаний–уравнению переноса. Одно из важнейших достижений математического анализа XIX века состоит в том, что решение УЧП первого порядка сводится к интегрированию соответствующих характеристических систем ОДУ первого порядка. С физической точки зрения этот факт есть проявление двойственности в описании волнового процесса: при помощи волновых фронтов или при помощи лучей(траекторий) частиц в конфигурацтонном пространстве классической системы, задаваемой характеристической системой ОДУ. Постулирование асимптотических потроений коротко-волнового приближения– задача следующего семестра. Здесь же мы обоснуем элементы этого построения, предъявив алгоритмы построения решений нелинейных уравнений первого порядка.

**Общие решения.** В этом параграфе мы приведем алгоритмы построения общих решений квазилинейных уравнений первого порядка. Начнем с построения решения квазилинейного уравнения

$$\sum_{j=1}^{n} a_i(x,u)\partial_{x_i}u = b(x,u), \quad (x,u)\in\Omega\subset\mathbf{R}^{n+1} \tag{121}$$

Сначала исследуем линейное уравнение

$$\widehat{L}_a u \equiv \langle a(x),\partial_x\rangle u = \sum_{j=1}^{n} a_i(x)\partial_{x_i}u = 0, \quad x\in D\subset\mathbf{R}^n \tag{122}$$

Потребуем, чтобы в ограниченной области $D$ векторное поле $v = a(x) \in C^1(\overline{D})$. Рассмотрим в области $D$ систему ОДУ

$$\mathring{x}_i = a_i(x), \quad i = 1,\dots,n \tag{123}$$

Тогда для любой точки $\xi \in D$ существует $\delta(D) > 0$ на интервале $I_\delta = (-\delta,\delta)$ существует единственное решение задачи Коши

$$x|_{\tau=0} = \xi$$

Дополнительно потребуем, чтобы

$$a(x) \neq 0,\ x\in D. \tag{124}$$

Траектории $l_\xi = \{x \in R^n :\ \ x = X(\xi,\tau),\ \tau\in I_\delta\}$, называются характеристиками уравнения в частных производных (122).

Предложение 0.2: Пусть $a(x)\neq 0$ в области $D$(неособое векторное поле). Тогда функция $u(x),\ x\in D$, является первым интегралом системы (123) тогда и только тогда, когда $u(x)$ есть решение УЧП(122).

Пусть $u(x)$- автономный первый интеграл (123), зависящий только от $x$. Тогда $u|_{l_\xi} = u(X(\xi,\tau)) = \mathrm{const}$, т.е.

$$\frac{d}{d\tau}u(X(\xi,\tau)) = \sum_{j=1}^{n}\ \partial_{x_j}u(X(\xi,\tau))\frac{dX_j}{d\tau} = \langle a(X(\xi,\tau),\nabla u(X(\xi,\tau))\rangle$$

Отсюда
$$\langle a(X(\xi,\tau), \nabla u(X(\xi,\tau))\rangle \equiv 0 \ \ \forall \xi \in D,\ \tau \in I_\delta.$$
Если взять $\tau = 0,\ X(\xi,0) = \xi$, то получим соотношение $\sum_{j=1}^n a_i(\xi)\partial_{x_i} u(\xi) = 0$, $\forall \xi \in D$. Так как $\xi$- произвольно, то уравнение (122) тождественно выполнено в $D$. Иными словами, УЧП(122) на характеристиках системы (123) превращается в тривиальное ОДУ $du/d\tau = 0$. Обратно, если $u(x)-$ решение УЧП (122), то

$$\frac{d}{d\tau}u(X(\tau,\xi) = \sum_{j=1}^{n}\ \partial_{x_j} u \overset{\circ}{x}_j = \widehat{L}_a u \equiv 0$$

**Замечание.** В чем природа дополнительного условия (124)? Решения $u(x)$ уравнеия (122) автономны, т.е. зависят только от $x$. Условие (124) позволяет доказать существование $(n-1)$ независимых первых интегралов $v_1(x), \dots, v_{n-1}(x)$, системы (123), зависящих только от $x$. Действительно, так как $a \neq 0$, для определености будем считать, что $a_1(x) \neq 0$. Тогда можно исключить $\tau$, взяв за параметр на траектории $x_1$. Тогда

$$\frac{dx_j}{dx_1} = \frac{a_j(x)}{a_1(x)}, \quad j = 2, \dots, n. \tag{125}$$

$$\frac{d\tau}{dx_1} = \frac{1}{a_1(x)} \tag{126}$$

Из теоремы о локальном существовании первых интегралов для системы ОДУ следует существование $(n-1)$ независимых первых интегралов $v_1(x), \dots, v_{n-1}(x)$ системы (125) и любой первый интеграл $w$ этой системы выражается через $v_j$: $w = F(v_1(x), \dots, v_{n-1}(x))$. Очевидно, что если $v_j(x)$-первые интегралы системы (125), то:

$$\frac{dv_j}{d\tau} = \partial_{x_1} v a_1 + \sum_{j=2}^{n}\ \partial_{x_j} v a_j = a_1(\partial_{x_1} v + \sum_{j=2}^{n}\ \partial_{x_j} v \frac{a_j}{a_1}) = 0$$

следовательно $v_j(x)$-первые интегралы (123). Решая систему (125) мы сведем уравнение (126) к уравнению

$$\frac{d\tau}{dx_1} = \frac{1}{\widehat{a_1}(x_1)}, \quad \widehat{a_1}(x_1) = a_1(x_1, x_2(x_1), \dots, x_n(x_1)). \tag{127}$$

Это уравнение имеет первый интеграл $v_n = \tau - \int_0^{x_1} \frac{ds}{\widehat{a_1}(s)}$, который есть также первый интеграл системы (125), (126).

Теорема 0.66: Справедливо следующее утверждение:

1) Система (123), не содержащая в $D$ точек покоя ($a(x) \neq 0$), всегда имеет в этой области $(n-1)$ автономных первых интегралов $u_1(x), \dots, u_{n-1}(x)$,(не зависящих от $\tau$) и независимых друг от друга, т.е. таких что

$$\mathbf{rank}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j})|_{(n-1)\times n} = n-1, \quad x \in D.$$

2) Любой другой автономный первый интеграл $u(x)$ есть произвольная гладкая функция от $(n-1)$ независимых автономных первых интегралов:
$u(x) = F(u_1(x), \dots, u_{n-1}(x))$, где $F(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in C^1(R^{n-1})-$ произвольная гладкая функция от $(n-1)$ аргументов.

Локально теорему мы доказали, так что для любой точки $x \in D$ существует окрестность $O_x \subset D$, в которой результат теоремы следует из существование $(n-1)$ независимых первых интегралов системы (123), для которых справедливо утверждение 2). Зафиксируем любую точку $x = x_*$. Тогда в окрестности $O_{x_*}$ есть $(n-1)$ первых интегралов $u_1^*(x), \ldots, u_{n-1}^*(x)$, независимых друг от друга. Терепь рассмотрим конечное покрытие границы $\partial O_{x_*}$ областями $\partial O_{x_j},\ j = 1, \ldots, N_{x_*}$. В любом пересечении $\partial O_{x_*} \cap O_{x_j}$ есть первые интегралы $u_j^*$, для которых существует единственная функция $F_j^*(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1})$, такая что

$$u_j^* = F_j^*(u_1^j, \ldots, u_{n-1}^j) \tag{128}$$

выражается через независимые первые интегралы $u_1^j(x), \ldots, u_{n-1}^j(x)$, области $O_{x_j}$. Тогда формула (128) дает продолжение $u_j^*(x)$ как первого интервала в область $O_{x_j}$. Это построение можно продолжить. Откуда следуют результаты теоремы.

Следствие 0.16: В области $D$, в которой $a(x) \neq 0$, общее решение уравнения (122) имеет вид $u(x) = F(u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x))$, где $u_1(x), \ldots, u_{n-1}(x)$- первые интегралы, а $F(\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in C^1(R^{n-1})-$ произвольная гладкая функция от $(n-1)$ аргументов.

**Характеристики и общее решение.** Теперь перейдем к построению решения квазилинейного уравнения (121). Сопоставим уравнению (121) векторное поле, считая что оно неособое в области $\widetilde{D}$:

$$\overline{v} = (a(x,u), b(x,u)) \neq 0, \quad (x,u) \in \widehat{D}.$$

В дальнейшем будем считать что все коэффициенты в уравнении (121) – достаточно гладкие(т.е. имеют столько производных, сколько необходимо).

Предложение 0.3: Характеристической системой для квазилинейного уравнения (121) является автономная система ОДУ( в $\widetilde{D} \subset R_X^{n+1} \times r_u^1$) вида

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x,u), \qquad \frac{du}{d\tau} = b(x,u) \tag{129}$$

Решение задачи Коши для системы (129) с начальными данными $x|_{\tau=0} = x_0,\ ux|_{\tau=0} = u_0$ на интервале $I_\delta$ определяет характеристику–фазовую траекторию

$$L_{x_0,u_0} = \{x = X(x_0,\tau,u_0),\ u = U(x_0,\tau,u_0),\ \tau \in I_\delta\}$$

Предложение 0.4: Произвольное гладкое решение квазилинейного УЧП(121) неявно задается функциональным уравнением вида

$$F(v_1(x,u), \ldots, v_n(x,u)) = 0, \tag{130}$$

где $F(\xi_1, \ldots, \xi_n) \in C^1(R^n)$, $v_1, \ldots, v_n$- $n$ независимых первых интегралов автономной системы (129), $(x,u) \in \widetilde{D}$.

Эти предлрожения докажем сведением к результатам предыдущего пункта. Пусть $u(x)$ гладкое решение уравнения (121). Будем считать, что оно определяется уравнением

$$V(x_1,\dots,x_n,u(x))\equiv 0,\quad x\in\widetilde{D}_x, \tag{131}$$

где $V$ неизвестная функция, $\widetilde{D}_x-$ проекция $\widetilde{D}$ на $R^n_x$. Тогда

$$\partial_{x_i}V+\partial_uV\partial_{x_i}u=0\quad\Rightarrow\quad\partial_{x_i}u=-\partial_{x_i}V/\partial_uV.$$

Подставим полученные выражения в (121). Тогда для $V$ получим

$$\sum_{j=1}^n a_i(x,u)\partial_{x_i}V+b(x,u)\partial_uV=0,\quad V=V(x,u) \tag{132}$$

линейное однородное уравнение с числом независимых переменых $(n+1)$. Для такого уравнения характеристики определяются системой (129), откуда следует утверждение (0.3). Болеетого, в силу следствия предыдущего пункта общее решение этого уравнения есть произвольная гладкая функция от $n$ независимых первых интегралов характеристической системы (129)

$$V(x,u)=F(v_1(x,u),\dots,v_n(x,u)).$$

Тогда уравнение (131) определяет решение (121), если

$$\partial_uV(x,u)\neq 0.$$

**Примеры.**

I). Рассмотрим уравнение Хопфа(уравнение нелинейной бугущей волны)

$$\partial_tu+u\partial_xu=0,\quad(x=(x_1,x_2)=(x,t)).$$

Здесь скорость распространения волны $a=a(u)=u$ зависит от решения. Оно описывает поле скоростей $u(x,t)$ в среде, состоящей из континуума частиц $\xi\in R^1$, движущихся равномерно и прямолинейно, т.е. $\overset{\circ\circ}{x}=0$. Отсюда

$$x=X(\xi,t)=\xi+v_0(\xi)t,$$

где $v_0(\xi)$ начальная скорость частицы. Координата $\xi$ называется лагранжевой координатой среды(одномерной), $t-$ время. По определению поля скоростей имеем

$$\frac{dX}{dt}=u(X(\xi,t),t)\quad\Rightarrow\quad\overset{\circ\circ}{X}=\partial_tu(X(\xi,t),t)+\partial_xu(X(\xi,t),t)\;u(X(\xi,t),t)=0. \tag{133}$$

В области, где якобиан $J_x=\partial_\xi X(\xi,t)\neq 0$, то для уравнения $x=X(\xi,t)$ существует единственное гладкое решение $\xi=\xi(x,t)$. Тогда в силу (133) имеем

$$\partial_tu(x,t)+u(x,t)\partial_xu=0.$$

Координата $x$ называется эйлеровой координатой среды. Характеристическая система для уравнения Хопфа

$$\overset{\circ}{x}=u,\quad\overset{\circ}{t}=1,\quad\overset{\circ}{u}=0,$$

т.е. $a(x,u) = (u,1)$, $b(x,u) = 0$, $\overline{v} = (u,1,0)$. Найдем два первых интегралов:

1. $\overset{\circ}{u}= 0 \quad \Rightarrow \quad u = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad v_1(x,t,u) \equiv u$;

2. $\overset{\circ}{x}= u = \mathrm{const} \quad \Rightarrow \quad x = ut + C \quad \Rightarrow \quad x - ut = C \quad \Rightarrow \quad v_2(x,t,u) = x - ut$. Из утверждения (0.4) следует, что решение $u$ неявно задается уравнением

$$F(u, x - ut) = 0,$$

где $F(\xi_1, \xi_2) \in C^1(R^2)$. В предположении, что

$$\partial_{\xi_1} F \neq 0$$

общее решение уравнения Хопфа записывается в виде $u = f(x - ut)$. Действительно,

$$\partial_u F(u, x - ut) = \partial_{\xi_1} F - t\partial_{\xi_2} F \neq 0,$$

если $t$ настолько мало, что $t|\partial_{\xi_2} F| < \ |\partial_{\xi_1} F|$.

II). Общее решение уравнения

$$y\partial_x u - x\partial_y u = 0$$

Характеристическая система

$$\overset{\circ}{x}= y, \quad \overset{\circ}{y}= -x, \quad \overset{\circ}{u}= 0,$$

Из $\overset{\circ}{u}= 0$ следует, что первый интеграл $v_1(x,y,u) = u$. Второй первый интеграл $v_2(x,y,u) = x^2 + y^2$. Решение $u$ неявно задается уравнением

$$F(u, x^2 + y^2) = 0,$$

где $F(\xi_1, \xi_2) \in C^1(R^2)$, в предположении, что $\partial_{\xi_1} F \neq 0$. Тогда общее решение уравнения записывается в виде $u = f(x^2 + y^2)$.

II). Общее решение уравнения

$$(x - z)\partial_x u + (y - z)\partial_y u + 2z\partial_z u = 0$$

Характеристическая система

$$\overset{\circ}{x}= x - z, \quad \overset{\circ}{y}= y - z, \quad \overset{\circ}{z}= 2z, \quad \overset{\circ}{u}= 0,$$

Из $\overset{\circ}{u}= 0$ следует, что первый интеграл $v_1(x,y,u) = u$. Далее $z(t) = z_0 e^{2t}$, в тоже время $\frac{d}{dt}(x - y) = x - y$. Отсюда $x - y = (x_0 - y_0)e^t$ и

$$\left(\frac{x - y}{x_0 - y_0}\right)^2 = \frac{z}{z_0}$$

Отсюда второй первый интеграл $v_2(x,y,z,u) = (x-y)^2/z$. Далее, из первого уравнения $x(t) = -z_0 e^{2t} + (x_0 + z_0)e^t$. Отсюда третий первый интеграл $v_3 = (x + z)^2/z$. Общее решение уравнения записывается в виде $u = f((x - y)^2/z; (x + z)^2/z)$

**Задача Коши для квазилинейного уравнения.** Теперь рассмотрим

$$a_1(x,u)\partial_{x_1}u + a_2(x,u)\partial_{x_2}u = b(x,u), \quad (x,u) \in \Omega \subset \mathbf{R}^3, \; n = 2. \tag{134}$$

Характеристическая система в этом случае

$$\overset{\circ}{x} = a(x,u), \quad a(x,u) = (a_1(x,u), a_1(x,u)), \tag{135}$$
$$\overset{\circ}{u} = b(x,u)$$

Решение $x = X(x_0, \tau, u_0), \; u = U(x_0, \tau, u_0)$ задачи Коши для системы (135) на интервале $I_\delta = (-\delta, \delta)$ с начальными условиями

$$x|_{\tau=0} = x_0, \quad u|_{\tau=0} = u_0$$

задает в $R^3$ характеристику- фазовую траекторию системы (135), проходящую через точку $M_0(x_0, u_0)$:

$$L_{M_0} = \{(x,u) : \; x = X(x_0, \tau, u_0), \; u = U(x_0, \tau, u_0), \; \tau \in I_\delta\}.$$

Поставим для уравнения (137) задачу Коши, используя аналогию с ОДУ.

Для ОДУ $u' = f(x,u), \; x \in R^1, \; f(x,u) \in C^\infty(R^2_{x,u})$. задача Коши определяется начальным условием $u|_{x_0} = u_0$. Решение этой задачи $u = u(x, x_0, u_0), \; x \in I_\delta$, определяет на плоскости $R^2_{x,u}$ интегральную кривую $S_{M_0} = \{(x,u) : \; u = u(x, x_0, u_0), \; x \in I_\delta\}, \; M_0 = M_0(x_0, u_0)$, которая в каждой своей точке касается векторного поля $\overline{v} = (1, f(x,u))$. Иными словами, интегральная кривая $S_{M_0}$ в параметрической форме определяется парой функций $x(\tau), u(\tau)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\overset{\circ}{x} = 1, \quad \overset{\circ}{u} = f(x,u)$$

Перенесем эту постановку задачи Коши на уравнение (137). Проинтегрируем решение уравнения (137) $u = u(x_1, x_2)$ следующим образом. Определим в $R^3_{x,y}$ множество точек $S_u = \{(x,u) \in R^3 : \; u = u(x_1, x_2)\}$. Эти точки образуют гладкую двумерную поверхность в трехмерном пространстве, если $|\nabla u| \neq 0$. Эту поверхность называют интегральной поверхностью, отвечающей решению $u(x)$ уравнения (137).
Теперь можно провести сопоставление элементов задачи Коши для ОДУ и УЧП:

$$x_0 \;\to\; \gamma, \quad \gamma - \text{гладкая кривая в} \;\; R^2_x$$

$$u_0 = u(x_0) \;\to\; u_0|\gamma, \quad u_0 - \text{гладкая функция на кривой} \;\; \gamma;$$
$$M_0(x_0, u_0) \;\to\; \Gamma = \{(x,u) \in R^3 : \; x \in \gamma, \quad u|_\gamma = u_0\},$$

$\Gamma$ – гладкая кривая в рехмерном пространстве $R^3_{x,u}$;

$$S_{M_0} \;\to\; S_u, \quad S_u - \text{интегральная поверхность.}$$

Уточним понятие интегральной поверхности, исходя из следующего геометрического смысла уравнения (137). Для каждой точки $M \in S_u$ вычислим вектор нормали к ней $n(M) = (\nabla_x U(M), -1)$. Уравнение поверхности $S_u$ в пространстве $R^3_{x,u} : \; \{(x,u) : \; -u + u(x_1, x_2) = 0\}$, а вектор, касающийся характеристики $\overline{v} = (a(x,u), b(x,u)), \; \overline{v}(M) = (a(M), b(M))$. Тогда уравнение (137) означает, что вектор нормали к интегральной поверхности в каждой ее точке ортогонален характеристическому направлению в этой точке, задаваемому вектором $\overline{v}(M)$, т.е. $\langle n(M), \overline{v}(M) \rangle = 0$. Отсюда следует, что интегральная поверхность расслаивается на характеристики.

Предложение 0.5: Если $M_0 \in S_u$ и $L_{M_0}$ -характеристика, проходящая через $M_0$, то эта характеристика целиком лежит на поверхности $S_u$.

Отсюда приходим к следующей постановке задачи Коши для уравнения (137): провести через заданную в $R^3_{x,u}$ кривую $\Gamma$, определяемую начальными данными($\Gamma = \{(x,u) \in R^3: \ x \in \gamma, \ \ u|_\gamma = u_0\}$), интегральную поверхность $S_u$, содержащую эту кривую. Из утверждения также следует геометрический алгоритм решения этой задачи: надо выпустить из точки $M_0 \in \Gamma$ характеристики $L_{M_0}$ и затем взять их объединение. Полученая таким образом поверхность, "сотканнаяя"из характеристических кривых, и есть искомая интегральная поверхность.

## Лекция-Упражнение 21. алгоритм решения задачи Коши.

**Первый алгоритм решения задачи Коши для квазилинейного уравнения(**$n = 2$**).** Пусть дана гладкая кривая

$$\gamma = \{(x_1, x_2): \ x_1 = X_1^0(\xi), \ x_2 = X_2^0(\xi), \ \xi \in I_0 \subset R^1_\xi\},$$

и гладкая функция $u_0(\xi)$ на кривой $\gamma$:

$$u|_\gamma = u_0(\xi), \quad \xi \in I_0. \tag{136}$$

Требуется решить задачу Коши для уравнения

$$a_1(x,u)\partial_{x_1} u + a_2(x,u)\partial_{x_2} u = b(x,u), \quad (x,u) \in \Omega \subset \mathbf{R}^3, \ n = 2. \tag{137}$$

с начальными данными (136). Приведем следующий алгоритм решения этой задачи.

1. Решим задачу Коши для системы ОДУ

$$\overset{\circ}{x}(\tau) = a(x,u), \quad \overset{\circ}{u}(\tau) = b(x,u), \quad \tau \in I_\delta,$$

$x \in R^2, \ a = (a_1, a_2)$, с начальными данными

$$x|_{\tau=0} = X^0(\xi), \quad u|_{\tau=0} = u_0(\xi), \tag{138}$$

$X^0(\xi) = (X_1^0(\xi), X_2^0(\xi))$, т.е. построим семейство характеристик $L_\xi, \ \xi \in I_0$, системы ()

$$x = X(\xi,\tau), \ u = U(\xi,\tau), \quad \xi \in I_0, \ \tau \in I_\delta = (-\delta(\xi), \delta(\xi)), \ \delta(\xi) > 0. \tag{139}$$

Формулы (139) задают гладкую двумерную поверхность $S$ в пространстве $R^3_{x,u}$ в параметрической форме, если ранг матрицы

$$\mathbf{rang}\begin{pmatrix} \partial_\xi X & \partial_\tau X \\ \partial_\xi U & \partial_\tau U \end{pmatrix} = 2$$

Это позволяет разрешить систему (139) относительно переменных $\tau, \xi$:

$$\xi = \xi(x_1, x_2), \quad \tau = \tau(x_1, x_2) \tag{140}$$

Это возможно при условии, что якобиан

$$J(\xi,\tau)=\frac{DX(\xi,\tau)}{D(\xi,\tau)}\neq 0,\quad \xi\in I_0,\ \tau\in I_\xi, \tag{141}$$

где $J(\xi,\tau)-$ якобиан отображения $(\xi,\tau)\to\ (x_1,x_2)$, задаваемого (139).

2. Определить функцию

$$u=u(x_1,x_2)=U(\xi,\tau)|_{\xi=\xi(x_1,x_2),\tau=\tau(x_1,x_2)}. \tag{142}$$

Предложение 0.6: Если функция (142) один раз дифференцируема по $x=(x_1,x_2)$, то она является решением задачи Коши (137), (136).

Требуется доказать, что поверхность $S$, параметрически заданная соотношениями (139), есть интегральная поверхность $S=S_u$, содержащая заданную кривую Г.

**Доказательство.** В произвольной точке $M\in S$ с координатами $(x,u)$, где $x$ и $u$ определяются соотношениями (139) имеем

$$\langle a(x,u),\nabla_x u(x)\rangle|_{(x,u)\in S}=\langle a(X(\xi,\tau),U(\xi,\tau)),\nabla_x U(X(\xi,\tau))\rangle=$$

$$=\langle\frac{dX(\xi,\tau)}{d\tau},\nabla_x U(X(\xi,\tau))\rangle=\frac{du}{d\tau}(X(\xi,\tau))=b(x,u)|_{(x,u)\in S}$$

Последнее равенство означает, что функция (142) удовлетворяет уравнению (137) в произвольной точке $x$ из окрестности кривой $\gamma$. Причем, в силу формул (138)-(142) $u(x)|_{x\in\gamma}=U(\xi,0)=u_0(\xi)$.

**Задача.** Докажите, что функция (142)–единственное решение задачи Коши (137), (136).

**Примеры.**

1).

$$yz\partial_x z+xz\partial_y z=xy,\quad x=a,\ y^2+z^2=a^2$$

Характеристическая система

$$\overset{\circ}{x}=yz,\quad \overset{\circ}{y}=xz,\quad \overset{\circ}{z}=xy,$$

Отсюда $dx/dy=y/x\quad\Rightarrow\quad v_1=x^2-y^2$. Также имеем $dx/dz=z/x\quad\Rightarrow\quad v_1=x^2-z^2$. На кривой $\widetilde{\gamma}=\{(x,y,u):\ x+a,\ y^2+z^2=a^2\}\subset R^3$: $(V_1+V_2)|_{\widetilde{\gamma}}=(2x^2-(y^2+z^2))|_{\widetilde{\gamma}}=a^2$ Таким образом, уравнение, определяюшее рещение задачи Коши

$$F(v_1,v_2)=v_1+v_2-a^2=2x^2-y^2-z^2-a^2=0.$$

Очевидно $\partial_z F(v_1,v_2)|_{\widetilde{\gamma}}=-2z|_{\widetilde{\gamma}}=-(\pm\sqrt{a^2-y^2})\neq 0$, если $y\neq\pm a$. Таким образом, вне точек $M^\pm=(a,\pm a,0)$ касания характеристики кривой $\gamma$ задачи Коши имеет решение. Здесь вектор скорости $(a,b)|_{\widetilde{\gamma}}=(yz,xz,xy)|_{\widetilde{\gamma}}=(0,0,\pm a^2)$, Нормаль к цилиндру $K=\{(x,y,z),\ x\in R^1,\ y^2+z^2=a^2\}$ в точках $M^\pm$ равна $n^\pm=(0,\pm1,0)$. Очевидно $\langle(0,0,\pm a^2),(0,\pm1,0)\rangle=0$.

2).

$$x\partial_x z+y\partial_y z=2xy,\quad \gamma=\{y=x\},\quad z|_\gamma=x^2$$

Характеристическая система

$$\overset{\circ}{x}= x, \quad \overset{\circ}{y}= y, \quad \overset{\circ}{z}= 2xy,$$

Отсюда

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x}{y} \quad \Rightarrow \quad v_1 = \frac{x}{y}$$

$$(xy)' = 2xy = z' \quad \Rightarrow \quad v_1 = z - xy$$

Общее решение $z - xy - f(\frac{x}{y}) = 0$. На начальной кривой

$$(z - xy - f(\frac{x}{y}))|_\Gamma = x^2 - x^2 - f(1) = -f(1).$$

Таким образом, рещение не единственное!!! С любой $C^1$ функцией $f(s)$, такой что $f(1) = 0$. В чем дело? Характеристики здесь $x = x_0 e^t$, $y = y_0 e^t$. Если $x_0 = y_0$ получаем начальную $\gamma$, которая следовательно является характеристикой.

3).

$$x\partial_x z + z\partial_y z = y, \quad y = 2z, \ x + 2y = z$$

$$\overset{\circ}{x}= x, \quad \overset{\circ}{y}= z, \quad \overset{\circ}{z}= y$$

Отсюда $dy/dz = z/y \quad \Rightarrow \quad v_1 = y^2 - z^2$. Траектории $x = x_0 e^t$, $y = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$, $y = c_1 e^t - c_2 e^{-t}$. Следовательно $v_2 = (y + z)/x$, $v_3 = (y - z)x$. Выберем два независимых $v_1, v_3$. На $\Gamma = \{(x, y, z) : \ y = 2z, \ x + 2y = z\}$ имеем

$$v_1|_\Gamma = \frac{3}{4}y^2, \quad v_3|_\Gamma = -\frac{3}{4}y^2 \quad \Rightarrow \quad v_1 + v_3 = 0$$

определяет нужное решение, т.е. $F(v_1, v_2) = v_1 + v_3 = y^2 - z^2 + (y - z)x = (y - z)(y + z + x) = 0$. Отсюда

$$\partial_z F(v_1, v_2)|_\Gamma = -(2z + x)|_\Gamma = -y/2 \neq 0,$$

если $y \neq 0$. При $y = 0$ точка $M_0 = (0, 0, 0) \in \Gamma$, в которой нарушеено условие $(a, b) \neq 0$ существования двух независимых автономных первых интегралов. Вне этой точки задача Коши разрешима.

**Второй алгоритм.** Второй алгоритм решения задачи Коши (137), (136). Рассмотрим неоднородное линейное уравнение

$$a_1(x_1, x_2)\partial_{x_1} u + a_2(x_1, x_2)\partial_{x_2} u + b(x)u = f(x), \tag{143}$$

с начальным условием

$$u|_\gamma = u_0(\xi), \tag{144}$$

где $\gamma = \{(x_1, x_2) : \ x_1 = X_1^0(\xi), x_2 = X_2^0(\xi), \quad \xi \in I_0 \subset R^1_\xi\}$-гладкая кривая в пространстве $R^2$, $u_0(\xi)$-заданная гладкая функция. Второй алгоритм решения состоит в построении характеристик уравнения (143):

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x), \quad x \in R^2, \quad a = (a_1, a_2) \tag{145}$$

с начальными условиями на кривой $\gamma$:

$$x|_{\tau=0} = X^0(\xi), \quad X^0(\xi) = (X_1^0(\xi), X_2^0(\xi)), \quad \xi \in I_0 \tag{146}$$

Решение этой задачи, т.е. семейство характеристик $l_\xi$, $\xi \in I_0$

$$x = X(\xi, \tau), \quad x \in R^2 \tag{147}$$
$$l_\xi = \{(x_1, x_2) : \ x = X(\xi, \tau), \quad \tau \in I_\xi\}$$

Теперь спроектируем уравнение (143) на характеристику

$$\frac{d\widetilde{u}(\xi, \tau)}{d\tau} + \widetilde{b}(\xi, \tau)\widetilde{u}(\xi, \tau) = \widetilde{f}(\xi, \tau), \tag{148}$$

$$\widetilde{u}(\xi, \tau) = u(x_1, x_2)|_{l_\xi} = u(X_1(\xi, \tau), X_2(\xi, \tau)),$$

$$\widetilde{b}(\xi, \tau) = b(x)|_{l_\xi} = b(x_1, x_2)|_{l_\xi}, \quad \widetilde{f}(\xi, \tau) = f(x_1, x_2)|_{l_\xi}$$

с начальными условиями

$$\widetilde{u}(\xi, \tau)|_{\tau=0} = u_0(\xi). \tag{149}$$

Разрешим (147) относительно $\tau$ и $\xi$ в предположении, что якобиан

$$J(\xi, \tau) = \det \frac{DX(\xi, \tau)}{D(\xi, \tau)} \neq 0, \quad \tau \in I_\xi, \quad \xi \in I_0 : \tag{150}$$

$$\xi = \xi(x_1, x_2), \quad \tau = \tau(x_1, x_2).$$

Теперь можно определить функцию

$$u = u(x_1, x_2) = \widetilde{u}(\xi, \tau)|_{\xi=\xi(x_1,x_2), \tau=\tau(x_1,x_2)}, \tag{151}$$

где $\widetilde{u}(\xi, \tau)$– решение задачи (148), (149).

Предложение 0.7: Если функция $u(x)$(149) существует и один раз дифференцируема, то она является решение задачи Коши (143), (144).

**Доказательство.** Формула (147) при выполнении условия (150) в некоторой окрестности $\Omega(\gamma)$ кривой $\gamma$ задает специальную замену координат:
$(x_1, x_2) \rightarrow \ (\xi, \tau)$. Одна из координатных линий этой системы координат, а именно $\xi = \xi(x_1, x_2) = \text{const}$ является характеристикой уравнения (143). Через каждую точку $M \in \Omega(\gamma)$ проходит единственна характеристика $l_\xi$ и, более того, существует единственное значение $\tau$ такое, что характеристика $l_\xi$ в момент $\tau$ попадает в точку $M$ с координатами $(\xi, \tau)$. Рассмотрим функцию (151). Воспользуемся тождеством

$$\widehat{L}_a u|_{l_\xi} = \frac{d}{d\tau}(u|_{l_\xi}) = \frac{d\widetilde{u}}{d\tau}(\xi, \tau).$$

Тогда на характеристике $l_\xi$ в точке $M$ уравнение (143) принимает вид (148). Отсюда, в силу произвольности выбора точки $M \in \Omega(\gamma)$, следует что функция (151) удовлетворяет уравнению (143) в области $\Omega(\gamma)$. При этом, в силу формул (147), (148) и (149)-(151) на кривой $\gamma$ имеем $u(x)|_{x\in\gamma} = \widetilde{u}(\xi,\tau)|_{\tau=0} = u_0(\xi)$.

Пусть все коэффициенты в уравнении (143) бесконечнодифференцируемы. Возникает вопрос: всегда ли в этом случае задача Коши имеет решение и если да, то единственно ли оно? Следующие ниже примеры показывают, что задача Коши (143), (144) не всегда имеет решение, а если и имеет, то оно, вообще говоря, **не единственно!** Причина этого кроется в поведении характеристических кривых системы (145) в окрестности кривой $\gamma$.

**Примеры**

1. Рассмотрим задачу Коши для линейного уравнения бугущей волны:

$$\partial_t u + a\partial_x u = 0, \quad x \in R^1,$$

$$u|_\gamma = 1,$$

где $\gamma = \{(x,t): \ x - at = 0\}$. Общее решение имеет вид $u = f(x-at)$, где $f \in C^1(R^1)$. Следовательно, $u|_\gamma = f(x-at)|_{x-at=0} = f(0) = 1$. Отсюда следует, что все решения задачи Коши определяются формулой $u = f(x-at)$, где $f(\xi) \in C^1(R^1)$ такая, что $f(0) = 1$. В этом примере кривая $\gamma$ сама является характеристикой системы (145).

2. Рассмотрим задачу Коши

$$x\partial_y u - y\partial_x u = 0,$$

$$u|_{x=1} = u_0(y),$$

где $\gamma = \{(x,y): \ x = 1\}$. Фазовые траектории характеристической системы

$$\overset{\circ}{x} = -y, \quad \overset{\circ}{y} = x,$$

являются окружностями: $x^2+y^2 = c, \ c > 0$. Следовательно, общее решение имеет вид $u = F(x^2+y^2), \ F(\xi) \in C^1(R^1)$.($v_1 = u, v_2 = x^2+y^2$-два независимых первых интеграла системы $\overset{\circ}{x} = -y, \ \overset{\circ}{y} = x, \ \overset{\circ}{u} = 0$). Вычислим $u|_\gamma = F(x^2+y^2)|_{x=1} = F(1+y^2) = u_0(y)$. Отсюда следует, что если функция $u_0(y)$ не является четной, то задача Коши не имеет решения. В этом примере кривая $\gamma$ не является характеристикой, но в одной своей точке $(x,y) = (1,0)$ она касается характеристики $x^2+y^2 = 1$.

**Обоснование второго алгоритма.**

Теорема 0.67: Пусть выполнены следующие условия:

1) $\gamma = \{x_1 = X_1^0(\xi), \ x_2 = X_2^0(\xi), \ \xi \in I_0\}$– гладкая кривая, $X_j^0(\xi) \in C^1(I_0), \ j = 1,2,$ и

$$((X_1^0)'(\xi))^2 + ((X_2^0)'(\xi))^2 \neq 0;$$

2) $u_0$– гладкая функция;

3) векторное поле $a(x)$, коэффициент $b(x)$ и правая часть $f(x)$ уравнения

$$a_1(x_1,x_2)\partial_{x_1} u + a_2(x_1,x_2)\partial_{x_2} u + b(x)u = f(x), \tag{152}$$

принадлежат классу $C^1(D),\ \gamma \in D \subset R^2$, и векторное поле $a(x) \neq 0$ при $x \in D$(нет стационарных точек в окрестности кривой $\gamma$);

4) ни в одной точке начальной кривой $\gamma$ векторное поле характеристической системы $a(x)$ не касается $\gamma$:

$$\det \begin{pmatrix} (X_1^0)'(\xi) & a_1(X^0(\xi)) \\ (X_2^0)'(\xi) & a_2(X^0(\xi)) \end{pmatrix}, \quad \forall \xi \in I_0,$$

где $a(M) = (a_1(X^0(\xi)), a_2(X(\xi))),\ M = (x = X^0(\xi)),-$ характеристический вектор к кривой $\gamma$ в точке $\xi,\ \overline{\tau}(M) = ((X_1^0)'(\xi), (X_2^0)'(\xi))-$ касательный вектор к кривой $\gamma$ в точек $\xi$.

Тогда второй алгоритм по формуле

$$u = u(x_1, x_2) = \widetilde{u}(\xi, \tau)|_{\xi=\xi(x_1,x_2), \tau=\tau(x_1,x_2)}, \tag{153}$$

определяет один раз дифференцируемую функцию $u(x_1, x_2)$ в некоторой окрестности

$$V_\delta(\gamma) = \{(x_1, x_2):\ x_1 = X_1(\xi, \tau),\ x_2 = X_2(\xi, \tau),\ \ \xi \in I_0,\ \tau \in I_\xi,\ J(\xi, \tau) \neq 0\},$$

где функции $X_i(\xi, \tau),\ i = 1, 2$, определены вторым алгоритмом:

$$\frac{dx}{d\tau} = a(x), \quad x \in R^2, \quad a = (a_1, a_2) \tag{154}$$

с начальными условиями на кривой $\gamma$:

$$x|_{\tau=0} = X^0(\xi), \quad X^0(\xi) = (X_1^0(\xi), X_2^0(\xi)), \quad \xi \in I_0 \tag{155}$$

Решение этой задачи, т.е. семейство характеристик $l_\xi,\ \xi \in I_0$

$$\begin{gathered} x = X(\xi, \tau), \quad x \in R^2 \\ l_\xi = \{(x_1, x_2):\ x = X(\xi, \tau), \quad \tau \in I_\xi\} \end{gathered} \tag{156}$$

Доказательство следует из:

1) терем существования и единственности решения задачи Коши для ОДУ(вектор-функция $X(\xi, \tau)$ и функция $\widetilde{u}(\xi, \tau)$ существуют и один раз дифференцируемы по $\tau$ при каждом $\xi$);

2) теорем о дифференцируемости решения задачи Коши для ОДУ по начальныи данным(вектор-функция $X(\xi, \tau)$ и функция $\widetilde{u}(\xi, \tau)$ дифференцируемы по $\xi$);

3) теоремы об обратной функции согласно которой решение системы (156) $\tau(x), \xi(x)$ существует, единственно и один раз дифференцируемо по $\xi$, если выполнено

$$\det \frac{DX(\xi, \tau)}{D(\xi, \tau)} \neq 0, \quad \tau \in I_\xi, \quad \xi \in I_0 : . \tag{157}$$

Покажем, что условие 4) теоремы обеспечивает выпонение условия (157) в некоторой малой окрестности кривой $\gamma$. Имеем

$$J(\xi, \tau)|_{\tau=0} = \det \frac{DX(\xi, 0)}{D(\xi, 0)} = \det \begin{pmatrix} (X_1^0)'(\xi) & a_1(X^0(\xi)) \\ (X_2^0)'(\xi) & a_2(X^0(\xi)) \end{pmatrix} \neq 0$$

так как $X(\xi,\tau)|_{\tau=0} = X^0(\xi)$. Отсюда и из того факта, что $J(\xi,\tau)$ непрерывна, следует что она отлична от нуля в некоторой окрестности интервала $I_0 \times \{\tau = 0\}$.

**Замечание.** С геометрической точки зрения данным Коши $\gamma, u|_\gamma)$ отвечает кривая $\Gamma = \{(x,u) : \ x = X^0(\xi),\ u|_\gamma = u_0(\xi),\ \xi \in I_0\} \in R^3_{x,u}$, а по второму алгоритму в окрестности $V_\delta(\gamma)$ строится интегральная поверхность $S_u$, проходящую через $\Gamma$.

**Многомерный вариант теоремы (0.67),** $n \geq 2$**.** Рассмотрим общее уравнение

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\partial_{x_j}u + b(x)u = f(x), \quad x \in R^n \tag{158}$$

с начальным условием

$$u|_\gamma = u_0, \tag{159}$$

где $\gamma = \{x : \ x = X^0(\xi_1,\dots,\xi_{n-1}),\ \xi = (\xi_1,\dots,\xi_{n-1}) \in I_0 \subset R^{n-1}_\xi\}-$ $(n-1)$ мерная гладкая гиперповерхность в $r^n_x$, а $u_0-$ заданная функция.

$$\mathbf{rank}(\frac{\partial X^0_i}{\partial \xi_j})_{n\times(n-1)} = n-1, \quad \forall \xi \in I_0,$$

иными словами, касательные вектора $l_j = \frac{\partial X^0}{\partial \xi_j},\ j = 1,\dots,n-1$, в каждой точке $\xi$ гиперповерхности $\gamma$ линейно независимы.

Теорема 0.68: Пусть выполнены следующие условия:

1) $\gamma-$ гладкая гиперповерхность;
2) $u_0$- гладкая функция, заданная на $\gamma$;
3) $a(x),\ b(x),\ f(x) \in C^1(D),\ \gamma \in D \subset R^n,\ a(x) \neq 0,\ x \in D$;
4) $a(x)$ не касается гиперповерхности $\gamma$ ни в одной точке, т.е. векторы $l_j = \partial_{\xi_j}X^0,\ j = 1,\dots,n-1$, и вектор $a$ $(x = X^0(\xi))$ линейно независимы:

$$\det[\partial_{\xi_1}X^0 \dots \partial_{\xi_{n-1}}X^0 a(X^0(\xi))] \neq 0, \quad \forall \xi \in I_0.$$

Тогда второй алгоритм, в котором следует скалярный параметр $\xi$ заменить на $(n-1)$-мерный вектор-параметр $\xi \in R^{n-1}$, а под $x$ понимать $n-$ мерный вектор $x \in R^n$, определяет функцию

$$u = u(x_1,x_2) = \widetilde{u}(\xi,\tau)|_{\xi=\xi(x_1,x_2),\tau=\tau(x_1,x_2)}, \tag{160}$$

являющуюся один раз дифференцируемым решением задачи (158), (159).

### Корректность первого алгоритма.

Теорема 0.69: Пусть выполнены следующие условия:

1) $\gamma-$ гладкая гиперповерхность;
2) $u_0$- гладкая функция, заданная на $\gamma$;

3) $a_1(x,u),\ a_2(x,u),\ b(x,u) \in C^1(\widetilde{D}),\ \gamma \in \widetilde{D} \subset R^3_{x,u}$ и полное векторное поле

$$\overline{v}(x,u) = (a(x,u),\ b(x,u)) \neq 0, \quad (x,u) \in \widetilde{D};$$

4) проекция характеристик характеристической системы на $R^2_x$ ни в одной точке на кривой $\gamma$ не касается $\gamma$:

$$\det \begin{pmatrix} (X_1^0)'(\xi) & a_1(x,u)|_\Gamma \\ (X_2^0)'(\xi) & a_2(x,u)|_\Gamma \end{pmatrix} \neq 0.$$

Тогда формула

$$u = u(x_1,x_2) = U(\xi,\tau)|_{\xi=\xi(x_1,x_2),\tau=\tau(x_1,x_2)}. \tag{161}$$

определяет один раз дифференцируемую функцию в некоторой окрестности $V_\delta(\gamma) = \{x \in R^2 :\ x = X(\xi,\tau),\ \xi \in I_0,\ \tau \in I_\xi,\ J(\xi,\tau) \neq 0\}$.

Доказательство аналогично доказательству теоремы (0.67).

## Лекция-Упражнение 22. Интегрирование уравнения неразрывности и уравнений переноса.

**Интегрирование уравнения неразрывности.** Рассмотрим в трехмерном пространстве течение идеальной жидкости(без трения, без источника и стока) с заданным полем скоростей $\overline{v}(x,t) \in C^1(R^4_{x,t})$. Пусть $\varrho(x,t)-$ плотность жидкости в точке $x$ в момент времени $t$. Из закона сохранения массы следует, что функция $\varrho(x,t)$ удовлетворяет УЧП первого порядка

$$\partial_t \varrho + \mathrm{div}_x(\varrho(x,t)\overline{v}(x,t)) = 0 \tag{162}$$

которое называется уравнением неразрывности. Поставим для него задачу Коши

$$\varrho|_{t=0} = \varrho_0(x), \tag{163}$$

где $\varrho_0(x) \in C^1(R^3)$- заданная начальная плотность жидкости. Имеем

$$\mathrm{div}_x(\varrho\overline{v}) = \langle \nabla_x \varrho, \overline{v} \rangle_{R^3} + \varrho\, \mathrm{div}_x\, \overline{v}, \tag{164}$$

Отсюда

$$\partial_t \varrho + \langle \nabla_x \varrho, \overline{v} \rangle_{R^3} + \varrho\, \mathrm{div}_x\, \overline{v} = 0. \tag{165}$$

Уравнение (165) представляет собой линейное однородное ($f = 0$) уравнение первого порядка размерности $n = 4((x,t) \in R^4)$. Гиперповерхность $\gamma \in R^4$ отвечающая начальному условию: $\gamma\{(x,t) :\ t = 0,\ x = \xi,\ \xi \in R^3\}$, причем $\varrho|_\gamma = \varrho_0(\xi)$. Очевидно, что в данном примере выполнены условия теоремы, обеспечивающие существование единственного гладкого решения задачи (162), (163) в некоторой окрестности $V_T(\gamma)$ ($\delta = T$) гиперповерхности $\gamma$. В частности, векторное поле $a(x,t) = (\overline{v}(x,t), 1)$ $a(x,t) \in R^4$, отвечающее (162), трансверсально $\gamma$. Проинтегрируем задачу (162), (163) с помощью второго алгоритма. В этом случае характеристическая система в расширенном фазовом пространстве $R^4_{x,t}$ имеет вид

$$\frac{dx}{d\tau} = \overline{v}(x,t), \quad \frac{dt}{d\tau} = 1, \quad x \in R^3. \tag{166}$$

Соответствующие начальные условия для этой системы

$$x|_{\tau=0} = \xi \in R^3, \quad t|_{\tau=0} = 0. \tag{167}$$

Обозначим решение задачи (166), (167) на интервале $I_\delta = (0,\delta),\ \delta > 0$,

$$x = X(\xi,\tau), \quad x,\xi \in R^3, \quad t = \tau, \quad \tau \in [0,T]; \tag{168}$$

$L_\xi -$ соответствующая характеристика, выходящая из точки $\xi$ в момент времени $\tau = 0$.

Плотность среды $\varrho(x,t)$ в лагранжевых координатах-функция $\varrho(x,t)|_{L_\xi} = \widetilde{\varrho}(\xi,\tau)$ удовлетворяет следующей задаче Коши

$$\frac{d\widetilde{\varrho}}{d\tau}(\xi,\tau) + \widetilde{\varrho}[\operatorname{div}_x \overline{v}(x,t)]|_{x=X(\xi,\tau),t=\tau} = 0, \tag{169}$$
$$\widetilde{\varrho}|_{\tau=0} = \varrho_0(\xi).$$

Очевидно, что решение этой задачи имеет вид

$$\widetilde{\varrho}(\xi,\tau) = \varrho_0(\xi)\ e^{-\int_0^\tau\ [\operatorname{div}_x \overline{v}(x,t)]|_{x=X(\xi,\tau'),t=\tau'}\ d\tau'} \tag{170}$$

Теперь разрешим систему (168) относительно $\tau$ и $\xi$

$$\tau = t, \quad \xi = \xi(x,t)$$

где вектор-функция $\xi(x,t)$ гладкое решение уравнений

$$x_i = X_i(\xi,t), \quad i = 1,2,3. \tag{171}$$

Здесь $X(\xi,t)$- проекция точки(с координатой $t$) на характеристике $L_\xi$ на конфигурационное пространство $R^3_x$ и является решением задачи Коши

$$\overset{\circ}{x} = \overline{v}(x,t), \quad x|_{t=0} = \xi. \tag{172}$$

Вычислим соответствующий якобиан:

$$J(\xi,\tau) = \det \frac{D(X(\xi,\tau), t(\xi,\tau))}{D(\xi,\tau)}|_{\tau=t} = [\det \begin{pmatrix} \partial_{x_i} X(\xi,\tau) & \partial_\tau X(\xi,\tau) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}]|_{\tau=t} =$$

$$= \det\left(\partial_{x_i} X(\xi,\tau)\right) = \det \left(\frac{\partial X_i}{\partial \xi_j}\right)_{3\times 3} = J_x(\xi,t).$$

Будем считать, что

$$J_x(\xi,t) \neq 0. \tag{173}$$

Тогда в окрестности $V_T(\gamma) = \{(x,t) \in R^4 :\ \ x = X(\xi,t),\ t \in [0,T],\ J_x(\xi,t) \neq 0\}$ решение задачи (162), (163) определяется формулой

$$\varrho(x,t) = \widetilde{\varrho}(\xi,\tau)|_{\xi=\xi(x,t),\tau=t} = \varrho_0(\xi)\ e^{-\int_0^t\ [\operatorname{div}_x \overline{v}(x,t)]|_{x=X(\xi,t')}\ dt'}|_{\xi=\xi(x,t)} \tag{174}$$

Теорема 0.70: Пусть при $t \in [0,T],\ \xi \in R^3$ выполнено условие (173). Тогда Формула (174) преобразуется к следующему виду:

$$\varrho(x,t) = \frac{\varrho_0(\xi)}{J_x(\xi,t)}|_{\xi=\xi(x,t)}, \tag{175}$$

где

$$J_x(\xi,t) = \det\left(\frac{\partial X(\xi,t)}{\partial \xi}\right) \neq 0, \quad t \in [0,T],\ \xi \in R^3, \tag{176}$$

вектор-функция $X(\xi,t)-$ решение задачи Коши (166), а $\xi = \xi(x,t)$-единственное гладкое решение системы (173)

Доказательство этой теоремы основывается на известной формуле Лиувилля

Лемма 0.20 (Формула Лиувиля.): Якобиан $J_x(\xi,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{dJ_x(\xi,t)}{dt} = J_x(\xi,t)\ [\mathrm{div}_x\, \overline{v}(x,t)]|_{x=X(\xi,t)}. \tag{177}$$

**Доказательство теоремы** (0.70). С учетом леммы Лиувилля из формулф (174) получаем

$$\varrho(x,t) = \varrho_0(\xi)\ e^{-\int_0^t\ \frac{J'_x}{J_x}dt'}\Big|_{\xi=\xi(x,t)} = \varrho_0(\xi)\ e^{-[\ln J_x(\xi,t)-\ln J_x(\xi,0)]}\Big|_{\xi=\xi(x,t)} =$$

$$= \varrho_0(\xi)\ J_x^{-1}(\xi,t)|_{\xi=\xi(x,t)}.$$

(здесь мы воспользовались тем, что $J(\xi,0)=1$).
Для доказательства формулы Лиувилля нам понадобиться следующая лемма

Лемма 0.21: Пусть $x = X(\alpha,t)-$ однопараметрическое($\alpha \in R$-параметр) гладкое семейство решений системы уравнений $\overset{\circ}{x}= \overline{v}(x,t),\ x \in R^3$. Тогда производная

$$\frac{\partial X(\alpha,t)}{\partial \alpha} = Y(\alpha,t) \in R^3,$$

удовлетворяет линейной системе дифференциальных уравнений

$$\frac{dY}{dt} = \overline{v}'_x(X(\alpha,t),t)Y\alpha,t), \quad \overline{v}'_x = (\frac{\partial v_i}{\partial x_j})_{3\times 3} \tag{178}$$

Эта система является системой в вариациях, отвечающая нелинейному уравнению $\overset{\circ}{x}= \overline{v}(x,t)$ и его решению $x = X(\alpha,t)$.
**Доказательство леммы (0.21)** Проведем доказательство для случая $n = 1(x \in R^1)$. Пусть $x = X(\alpha,t)-$ однопараметрическое гладкое семейство решений уравнения

$$\overset{\circ}{x}= v(x,t).$$

Тогда, дифференцируя по параметру $\alpha$ тождество $\frac{dX}{dt}(\alpha,t) = v(X(\alpha,t),t)$

(используя теорему Юнга:$\frac{\partial}{\partial\alpha}\frac{d}{dt}=\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial\alpha}$) получим уравнение в вариациях

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial X}{\partial\alpha}(\alpha,t)=\partial_x v(X(\alpha,t),t)\ \frac{\partial X}{\partial\alpha}(\alpha,t)$$

**Доказательство леммы (0.20)** Если существует трехпараметрическое гладкое семейство решений системы

$$\overset{\circ}{x}=\overline{v}(x,t),\quad x=X(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,t)\in R^3,$$

то, применив (178) для каждого вектора $Y_i=\frac{\partial X}{\partial\alpha_i}$, получим, что матрица $Y(\alpha,t)=(\frac{\partial X(\alpha,t)}{\partial\alpha})$ размерности $3\times 3$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\overset{\circ}{Y}=\overline{v}'_x(X(\alpha,t),t)Y. \tag{179}$$

Положим теперь $\alpha=\xi\in R^3$. Обозначим $J_x(\xi,t)=\det Y(\xi,t)$, считая, что $\det Y(\xi,t)\neq 0,\ 0\le t\le\delta$ $(\det Y(\xi,0)=1)$, и воспользуемся правилом дифференцирования определителя невырожденной матрицы

$$\frac{d}{dt}\det Y(\xi,t)=\det Y(\xi,t)\ \mathbf{tr}(\overset{\circ}{Y}\ Y^{-1})(\xi,t).$$

Отсюда, в силу (179), найдем что

$$\frac{dJ_x}{dt}=J_x\ \mathbf{tr}(\overline{v}'_x(X(\alpha,t),t)).$$

Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\mathbf{tr}(\frac{v_i}{\partial x_j})=\mathbf{tr}(\overline{v}'_x(X(\alpha,t),t))=\sum_{j=1}^{3}\ \frac{v_i}{\partial x_j}(X(\xi,t)=[\mathrm{div}_x\,\overline{v}'_x(x,t)]|_{x=X(\xi,t)}.$$

**Интегрирование уравнения переноса.** Амплитуда колебаний поля в волновых процессах определяется в коротковолновом приближении из так называемого уравнения переноса. Приведем здесь лишь два варианта этого уравнения:

1) для амплитуды $\varphi(x,t)$ решения задачи Коши в квазикласическом(коротковолновом) приближении $\Psi_{hw}(x,t)=\varphi(x,t)\,e^{\frac{i}{h}S(x,t)}$ для уравнения Шредингера

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{h^2}{2m}\Delta\Psi+V(x)\Psi,\quad \Psi|_{t=0}=e^{\frac{i}{h}S_0(x)}\varphi_0(x),$$

т.е. $(ih\partial_t+\frac{h^2}{2m}\Delta-V(x))\Psi_{hw}=O(h^2)$, где $\varphi_0(x)-$ финитная бесконечнодифференцируемая функция с компактным носителем, $S_0(x)\in C^\infty(R^n_x)$, уравнение переноса имет вид

$$m\partial_t\varphi+\nabla_x S\nabla_x\varphi+\varphi\frac{1}{2}\Delta S=0$$

Сделав замену времени $t=m\widehat{t}$ перейдем к уравнению вид

$$\partial_{\widehat{t}}\varphi+\nabla_x S\nabla_x\varphi+\varphi\frac{1}{2}\Delta S=0$$

Для простоты будем считать, что $m = 1$. Тогда это уравнение можно переписть в виде

$$\langle u(x,t), \nabla_{x,t}\varphi\rangle + f(x,t)\varphi(x,t) = 0, \quad x \in R^3,\ t \geq 0, \tag{180}$$

где $\nabla_{x,t} = (\nabla_x, \partial_t),\ u(x,t) = (\overline{v}(x,t), 1)$, причем заданное трехмерное векторное поле $\overline{v}(x,t)$ при каждом $t \in R$ является потенциальным полем с потенциалом $S(x,t)$:

$$\overline{v}(x,t) = \nabla_x S(x,t), \tag{181}$$

а функция $f$ также определяется потенциалом $S(x,t)$ по формуле

$$f(x,t) = \frac{1}{2}\Delta S(x,t), \tag{182}$$

$\Delta = \sum_{j=1}^{3} \partial^2_{x_j}-$ оператор Лапласа. Уравнение для фазы $S(x,t)$ в этом случае

$$\partial_t S + \frac{1}{2}(\nabla_x S)^2 + V = 0, \quad S|_{t=0} = S_0. \tag{183}$$

2) для амплитуды $\psi(x,t)$ решения задачи Коши(в квазикласическром приближении) $\psi_{hw}(x,t) = \varphi(x,t)\, e^{\frac{i}{h}S(x,t)}$ для волнового уравнения

$$\partial_t^2\Psi = a^2(x,t)\Delta\Psi, \quad \Psi|_{t=0} = e^{\frac{i}{h}S_0(x)}\varphi_0(x)$$

т.е. $(\partial_t^2 - a^2(x,t)\Delta)\Psi_{hw} = O(h^2)$, уравнеие переноса для амплитуды $\varphi(x,t)$ записывается в виде

$$\frac{\partial S}{\partial t}\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - a(x,t)\ \langle \nabla_x S(x,t), \nabla_{x,t}\varphi\rangle + f(x,t)\varphi(x,t) = 0, \quad x \in R^3,\ t \geq 0,$$

где $S(x,t)$ и $a(x,t)-$ гладкие функции, $a(x,t) > 0$, а функция $f$ также определяется через фазу $S(x,t)$ по формуле

$$f(x,t) = \Box_a S = \frac{1}{2}(\partial_t^2 S - a^2(x,t)\Delta S). \tag{184}$$

Уравнение для фазы

$$(\partial_t S)^2 - a^2(\nabla_x S)^2 = 0, \quad S|_{t=0} = S_0. \tag{185}$$

**Уравнение Шредингера.** Проинтегрируем уравнение переноса в первом

$$\langle u(x,t), \nabla_{x,t}\varphi\rangle + f(x,t)\varphi(x,t) = 0, \quad x \in R^3,\ t \geq 0, \tag{186}$$

при условии, что

$$\varphi(x,t)|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \varphi_0 \in C_0^\infty(R_x^3), \quad \Omega_0 = \mathbf{supp}\varphi_0, \tag{187}$$

($C_0^\infty(R_x^3)$-пространство бесконечно дифференцируемых финитных функций в $R_x^3$ с компактным носителем). Здесь

$$\overline{v}(x,t) = \nabla_x S(x,t),\ f(x,t) = \frac{1}{2}\Delta S(x,t),\ u(x,t) = (\overline{v},1)$$

и

$$\partial_t S + \frac{1}{2}(\nabla_x S)^2 = 0.$$

Обозначим через $X(x_0,t)$ решение задачи

$$\overset{\circ}{x} = \overline{v}(x,t), \quad x|_{t=0} = x_0, \quad x_0 \in \Omega_0, \tag{188}$$

и пусть якобиан

$$J_x(x_0,t) = \frac{DX(x_0,t)}{Dx_0} \neq 0, \quad x_0 \in \Omega_0,\ t \in [0,T]. \tag{189}$$

Обозначим через $x_0 = x_0(x,t)$ единственное гладкое решение системы

$$x_i = X_i(x_0,t), \quad i = 1,2,3, \quad x_0 \in \Omega_0, \quad t \in [0,T] \tag{190}$$

Теорема 0.71: Пусть выполнено условие (189). Тогда решение задачи (186), (187) на отрезке $[0,T]$ определяется формулой

$$\varphi(x,t) = \frac{\varphi(x_0)}{\sqrt{J_x(x_0,t)}}\Big|_{x_0 = x_0(x,t)}. \tag{191}$$

$$\frac{dJ_x(x_0,t)}{dt} = J_x(x_0,t)\ [\mathrm{div}_x\, \overline{v}(x,t)]|_{x=X(x_0,t)}.$$

Доказательство следует из теоремы (0.70) и того факта, что квадрат амплитуды колебания $\varphi^2(x,t)$ удовлетворяет уравнению неразрывности вида (162) с заданным полем скоростей $v(x,t)$, определяемым формулой (181). Действительно, для фнкции $\varrho(x,t) = \varphi^2(x,t)$ в силу уравнения (162) с учетом вида $f(x,t)$, что $\varrho(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$2\varphi\partial_t\varphi + 2\varphi\nabla_x S\nabla_x\varphi + (\Delta S)\varphi^2 = \partial_t(\varphi^2) + \nabla_x S\nabla_x(\varphi^2) + (\Delta S)\varphi^2 =$$

$$= \partial_t(\varphi^2) + \nabla_x(\nabla_x S\varphi^2)$$

т.е.

$$\partial_t\varrho + \mathrm{div}(\varrho\overline{v}) = 0, \quad \overline{v} = \nabla_x S(x,t).$$

Отсюда в силу формулы (175) следует утверждение теоремы.

**Волновое уравнение.** Проинтегрируем теперь уравнение

$$\frac{\partial S}{\partial t}\ \frac{\partial \varphi}{\partial t} - a^2(x,t)\ \langle\nabla_x S(x,t), \nabla_x\varphi\rangle + f(x,t)\varphi(x,t) = 0, \quad x \in R^3,\ t \geq 0, \tag{192}$$

в предположении, что фаза $S(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$(\frac{\partial S}{\partial t})^2 - a^2(x,t)(\nabla_x S)^2 = 0 \tag{193}$$

Как известно из курса общей физики, это нелинейное УЧП первого порядка есть основное для геометрической оптики уравнение–уравнение эйконала. Его решение $S(x,t)$ определяет фазу электромагнитных колебаний волнового поля в коротковолновом приближении. Способы интегрирования нелинейныз УЧП мы рассмотрим в следующих лекциях. Здесь же мы предположим, что нам известны два гладких решения $S^{\pm}(x,t)$ этого уравнения, которое удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t} \pm a(x,t)|\nabla_x S^{\pm}| = 0. \tag{194}$$

соответственно и, следовательно, удовлетворяют и уравнению (193). Обозначим через $X^{\pm}(x_0,t)$ решение задачи Коши

$$\frac{d}{dt}x^{\pm} = \pm a(x,t)\frac{\nabla_x S^{\pm}}{|\nabla_x S^{\pm}|}(x,t), \quad x^{\pm}|_{t=0} = x_0,\ x_0 \in \Omega_0 \subset R^3_x, \tag{195}$$

а через $x_0 = x_0^{\pm}(x,t)$– гладкое решение системы

$$x = X^{\pm}(x_0,t) \tag{196}$$

относительно параметра $x_0 \in \Omega_0$.

Теорема 0.72: Пусть выполнены следующие условия

1) якобиан отображения (201) отличен от нуля:

$$J_x^{\pm}(x_0,t) = \frac{DX^{\pm}(x_0,t)}{Dx_0} \neq 0, \quad x_0 \in \Omega_0,\ t \in [0,T];$$

2) $\nabla_x S(x,0) \neq 0, \quad x \in \Omega_0$.

Тогда функция

$$\varphi^{\pm}(x,t) = a(x,t)\ \frac{\varphi^0(x_0)}{a(x_0,0)\sqrt{J_x^{\pm}(x_0,t)}}\ \Big|_{x_0 = x_0^{\pm}(x,t)} \tag{197}$$

является гладким решением уравнения переноса (200) на отрезке $[0,T]$

$$\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}\ \frac{\partial \varphi^{\pm}}{\partial t} - a^2(x,t)\ \langle \nabla_x S^{\pm}, \nabla_x \varphi^{\pm}\rangle + \varphi^{\pm}(x,t)\frac{1}{2}\Box_a S^{\pm} = 0, \tag{198}$$

и удовлетворяет начальному условию

$$\varphi^{\pm}|_{t=0} = \varphi^0(x), \tag{199}$$

где $\varphi^{\pm}(x,t)^0(x)$– произвольная гладкая функция.

## Лекция-Упражнение 23. Нелинейные УЧП первого порядка.

Прошлую лекцию мы закончили формулирровкой теоремы о разрешимости уравнения переноса

$$\frac{\partial S}{\partial t}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t}-a^2(x,t)\,\langle\nabla_x S(x,t),\nabla_{x,t}\varphi\rangle+\varphi(x,t)\frac{1}{2}\Box_a S^{\pm}=0,\quad t\geq 0, \tag{200}$$
$$\varphi|_{t=0}=\varphi^0(x),\quad x\in R^3.$$

Теорема 0.73: Пусть выполнены следующие условия

1) якобиан отображения

$$x=X^{\pm}(x_0,t) \tag{201}$$

относительно параметра $x_0\in\Omega_0$ отличен от нуля:

$$J^{\pm}_x(x_0,t)=\frac{DX^{\pm}(x_0,t)}{Dx_0}\neq 0,\quad x_0\in\Omega_0,\ t\in[0,T];$$

2)

$$\nabla_x S(x,0)\neq 0,\quad x\in\Omega_0. \tag{202}$$

Тогда функция

$$\varphi^{\pm}(x,t)=a(x,t)\ \frac{\varphi^0(x_0)}{a(x_0,0)\sqrt{J^{\pm}_x(x_0,t)}}\ \Big|_{x_0=x_0^{\pm}(x,t)} \tag{203}$$

является гладким решением уравнения переноса (200) на отрезке $[0,T]$

$$\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}\,\frac{\partial \varphi^{\pm}}{\partial t}-a^2(x,t)\,\langle\nabla_x S^{\pm},\nabla_x\varphi^{\pm}\rangle+\varphi^{\pm}(x,t)\frac{1}{2}\Box_a S^{\pm}=0, \tag{204}$$

и удовлетворяет начальному условию

$$\varphi^{\pm}(x,t)|_{t=0}=\varphi_0^{\pm}(x), \tag{205}$$

где $\varphi_0(x)-$ произвольная гладкая функция и

$$\partial_t S^{\pm}\ \pm|\nabla_x S^{\pm}|=0 \tag{206}$$

Проведем доказательство теоремы лишь для случая, когда скорость распространения колебаний $a(x,t)\equiv a>0$ постоянна. Действуем, следуя пунктам второго алгоритма. Пусть $(x=X^{\pm}(x_0,\tau),\ t=t^{\pm}(x_0,\tau))-$ решение характеристической системы для (204)

$$\frac{dx^{\pm}}{d\tau}=-a^2\nabla_x S^{\pm}(x,t),\quad \frac{dt^{\pm}}{d\tau}=\partial_t S^{\pm}(x,t) \tag{207}$$

с начальными условиями $x(0)=x_0\in\Omega_0,\ t^{\pm}(0)=0$. На характеристике $L_{x_0,\tau=0}$ уравнения (204) запишется в виде

$$\frac{d}{d\tau}\widetilde{\varphi^{\pm}}(x_0,\tau)+\widetilde{\varphi^{\pm}}(x_0,\tau)\frac{1}{2}(\Box)_a S^{\pm}|_{x=X^{\pm}(x_0,\tau),t=t^{\pm}(x_0,\tau)}$$

$$\widetilde{\varphi^{\pm}}(x_0,\tau)=\varphi^{\pm}(X^{\pm}(x_0,\tau),t^{\pm}(x_0,\tau))$$

обыкновенного уравнения первого порядка относительно $\widetilde{\varphi^{\pm}}(x_0,\tau)$. Также как для амплитуды коротковолного приближения уравнения Шредингера, получаем что $\varrho=(\widetilde{\varphi^{\pm}})^2$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d}{d\tau}(\widetilde{\varphi^{\pm}}(x_0,\tau))^2+(\widetilde{\varphi^{\pm}}(x_0,\tau))^2(\Box)_a S^{\pm}|_{x=X^{\pm}(x_0,\tau),t=t^{\pm}(x_0,\tau)} \tag{208}$$

Воспользуемся тем, что в силу нашего предположения $a=\mathrm{const}$ для векторного поля $w=(-a^2\nabla_x S^{\pm}(x,t),\partial_t S^{\pm}(x,t)$ диввергенция $\operatorname{div} w=-a^2\operatorname{div}\nabla_x S^{\pm}(x,t)+\partial_t^2 S^{\pm}(x,t)=\Box_a S^{\pm}(x,t)$. Тогда из леммы Лиувилля для системы (208) следует, что якобиан

$$\widetilde{J_x^{\pm}}(x_0,\tau)=\frac{D(X^{\pm}(x_0,\tau),t^{\pm}(x_0,\tau))}{D(x_0,\tau)}$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\widetilde{J^{\pm}}(x_0,\tau)}{d\tau}=\widetilde{J^{\pm}}(x_0,\tau)\ \Box_a S^{\pm}|_{x=X^{\pm}(x_0,\tau),t=t^{\pm}(x_0,\tau)} \tag{209}$$

Тогда из (208), (211) следует, что

$$\widetilde{\varphi^{\pm}}(x_0,\tau)=\frac{\varphi_0(x_0)}{\sqrt{\widetilde{J^{\pm}}(x_0,\tau)}} \tag{210}$$

Теперь преобразуем якобиан $\widetilde{J^{\pm}}(x_0,\tau)$

$$\begin{aligned}\widetilde{J^{\pm}}(x_0,\tau)&=\frac{D(X^{\pm}(x_0,\tau),t^{\pm}(x_0,\tau)}{D(x_0,\tau)}= \\ &=\frac{D(X^{\pm}(x_0,\tau),t^{\pm}(x_0,\tau)}{D(x_0,t^{\pm}(x_0,\tau))}\ \frac{D(x_0,t^{\pm}(x_0,\tau))}{D(x_0,\tau)}= \\ &=\frac{D(X^{\pm}(x_0,\tau))}{Dx_0}\ \frac{dt^{\pm}}{d\tau}(x_0,\tau)=J_x^{\pm}(x_0,\tau)\ \frac{dt^{\pm}}{d\tau}(x_0,\tau)\end{aligned} \tag{211}$$

Здесь $J_x^{\pm}(x_0,\tau)=D(X^{\pm}(x_0,\tau))/Dx_0$.

**Перенормировка времени.** Докажем, что производная $\frac{dt^{\pm}}{d\tau}(x_0,\tau)$ постоянная вдоль траекторий (208). В самом деле, в силу (208) и уравнения (206) имеем

$$\frac{dt^{\pm}}{d\tau}(x_0,\tau)=\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}|_{x=X^{\pm}(x_0,\tau),t^{\pm}(x_0\tau)}=-(\pm|\nabla_x S^{\pm}(x_0,\tau)|=-|P^{\pm}(x_0,\tau)|,$$

где мы положили $P^{\pm}(x_0,\tau)=\nabla_x S^{\pm}(x_0,\tau)$. Коммутируя $\partial_\tau$ и $\nabla_x$, получим

$$\frac{\partial P^{\pm}}{\partial\tau}=-\frac{\partial}{\partial\tau}[\pm\nabla_x S^{\pm}(X^{\pm}(x_0,\tau),t^{\pm}(x_0,\tau))]=$$

$$=-\nabla_x[\pm\Big(\Big(\nabla_x S^{\pm},\frac{dX^{\pm}}{d\tau}\Big)+\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}\frac{\partial t^{\pm}}{\partial\tau}\Big)]$$

Отсюда, в силу системы (208) получим

$$\frac{\partial P^{\pm}}{\partial \tau} = -[\pm\nabla_x\Big( (\nabla_x S^{\pm}, -a^2\nabla_x S^{\pm}) + (\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t})^2\Big)] =$$

$$= -[\pm\nabla_x\Big( (\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t})^2 - a^2(\nabla_x S^{\pm})^2\Big)(X^{\pm}(x_0,\tau), t^{\pm}(x_0,\tau))] = 0$$

Поскольку функции $S^{\pm}$ удовлетворяют уравнения эйконала

$$(\partial_t S)^2 - a^2(\nabla_x S)^2 = 0$$

Таким образом, на фиксированной траектории системы (208)

$$\frac{dt^{\pm}}{d\tau}(x_0,\tau) = -(\pm|P^{\pm}(x_0,\tau)|) = \mathrm{const}^{\pm} \neq 0, \tag{212}$$

т.е.

$$\frac{dt^{\pm}}{d\tau}(x_0,\tau) \equiv \frac{dt^{\pm}}{d\tau}(x_0,0) = \gamma^{\pm}(x_0) = \partial_t S^{\pm}|_{\tau=0} = -(\pm\nabla_x S^0(x_0) \neq 0$$

в силу (202), где $t^{\pm}(x_0,0) = 0 \;\Rightarrow\; t^{\pm} = \gamma^{\pm}(x_0)\tau$. Положим в обоих случаях

$$t = t^{\pm} = \gamma^{\pm}(x_0)\tau.$$

Отсюда следует разрешимость уравнений

$$x = X^{\pm}(x_0,\tau), \quad t = \gamma^{\pm}(x_0)\tau \quad \Rightarrow \quad x_0 = x_0^{\pm}(x,t),\; \tau = \tau^{\pm}(x,t). \tag{213}$$

поскольку

$$\frac{D(X^{\pm}(x_0,\tau), t^{\pm}(x_0,\tau))}{D(x_0,\tau)} = \frac{D(X^{\pm}(x_0,\tau),\gamma^{\pm})}{D(x_0,\gamma^{\pm})}\;\frac{D(x_0,\gamma^{\pm}\tau)}{D(x_0,\tau)} = \widetilde{J}_x(x_0,\tau)\gamma^{\pm}(x_0) \neq 0.$$

Из формул (211), (213) получаем

$$\frac{dJ_x^{\pm}(x_0,\tau)}{d\tau} = J_x^{\pm}(x_0,\tau)\;\Box_a S^{\pm}|_{x=X^{\pm}(x_0,\tau),t=t^{\pm}(x_0,\tau)}, \tag{214}$$

где $J_x^{\pm}(x_0,\tau) = \frac{DX^{\pm}(x_0,\tau}{Dx_0}$. Теперь сделаем перенормировек $\tau \to t$, $\tau = \tau^{\pm}(x_0,t) = t/\gamma^{\pm}(x_0)$. Тогда из (214) следует

$$\Box_a S^{\pm}|_{x=X^{\pm}(x_0,t)} = \gamma^{\pm}(x_0)\frac{\frac{dJ_x^{\pm}(x_0,t)}{dt}}{J_x^{\pm}(x_0,t)}, \quad J_x^{\pm}(x_0,t) = J_x^{\pm}(x_0,\tau)|_{\tau=\tau^{\pm}(x_0,t)}.$$

Тогда из (208)

$$\frac{d}{dt}(\varphi^{\pm}(x_0,t))^2 + (\varphi^{\pm}(x_0,t))^2(\Box)_a S^{\pm}|_{x=X^{\pm}(x_0,t)} \tag{215}$$

отсюда

$$\varphi^{\pm}(x_0,t) = \frac{\varphi^0(x_0)}{\sqrt{J_x^{\pm}(x_0,t)}},$$

где $\varphi^0(x)-$ произвольная гладкая функция, и

$$\varphi^{\pm}(x,t) = \frac{\varphi^0(x_0)}{\sqrt{J_x^{\pm}(x_0,t)}}\Big|_{x_0=x_0(x,t)},$$

является решением уравнения переноса (204). Для завершения доказательства остается заметить, что при замене параметра $\tau$ на $t$ функция $X^{\pm}(x_0,t) = X^{\pm}(x_0,\tau)|_{\tau=t/\gamma^{\pm}}$ есть решение системы

$$\frac{dX(x_0,t^{\pm})}{dt^{\pm}} = \frac{\frac{dX(x_0,t^{\pm})}{d\tau}}{\frac{dt^{\pm}}{d\tau}} =$$

$$= -a^2\,\frac{\nabla_x S(x,t)}{\partial_t S(x,t)}\Big|_{x=X^{\pm}(x_0,\tau),t^{\pm}=t^{\pm}(x_0,\tau)} = -[\pm a\,\frac{\nabla_x S(x,t)}{|\nabla_x S(x,t)|}\Big|_{x=X^{\pm}(x_0,\tau),t^{\pm}=t^{\pm}(x_0,\tau)}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\partial_t S = \pm|\nabla_x S|$.

**Упражнение.** Докажите эту формулу для общего случая ($a(x,t) \neq 0$).

**Пример.** Рассмотрим теперь одномерную по $x$ версию уравнения переноса (200) в стационарной неоднородной среде(т.е. в такой среде, в которой скорость распространения колебаний $a(x,t)$ не зависит от времени $t$ и является гладкой функцией $x$: $a(x,t) \equiv a(x) > 0$)

$$\frac{\partial S^{\pm}}{\partial t}\,\frac{\partial \varphi^{\pm}}{\partial t} - a^2(x)\,\langle \nabla_x S^{\pm}(x,t), \nabla_{x,t}\varphi^{\pm}\rangle + f(x,t)\varphi^{\pm}(x,t) = 0, \quad t \geq 0, \tag{216}$$
$$\varphi^{\pm}|_{t=0} = \varphi^0(x) \quad x \in R^3.$$

Здесь функция $S^{\pm}(x,t)$ есть гладкое решение уравнения линейной бугущей волны в неоднородной среде со скоростью $\pm a(x)$ соответственно

$$\partial_t S^{\pm} \ \pm a(x)\partial_x S^{\pm} = 0. \tag{217}$$

Обозначим через $X(x_0,t)$ решение задачи Коши

$$\overset{\circ}{x} = \pm a(x), \quad x|_{t=0} = x_0, \tag{218}$$

которое, очевидно, легко интегрнировать

$$\pm t = \int_{x_0}^{X^{\pm}(x_0,t)} \frac{ds}{a(s)}) \tag{219}$$

Отсюда $X^{\pm}(x_0,t) = X(x_0,\pm t)$, где $X(x_0,s)$ решение уравнения

$$s = \int_{x_0}^{X(x_0,s)} \frac{d\mu}{a(\mu)}.$$

Отсюда найдем $J_x^{\pm}(x_0,t) = DX^pm(x_0,t)/Dx_0$. Дифференцируя (239) по $x_0$, получим

$$0 = \frac{\partial_{x_0}X^{\pm}(x_0,t)}{a(X^{\pm}(x_0,t))} - \frac{1}{a(x_0)}$$

т.е.

$$J_x(x_0,t) = \partial_{x_0} X^{\pm}(x_0,t) = \frac{a(X^{\pm}(x_0,t))}{a(x_0)}$$

Тогда общее решение уравнения переноса (216) задается формулой

$$\varphi^{\pm}(x,t) = \varphi^0(X(x,\pm t)\ \sqrt{\frac{a(x)}{a(X(x_0,\pm t)}}, \tag{220}$$

где $\varphi^0(x)$-произвольная гладкая функция.
**Упражнение.** Докажите эту формулу.

**Нелинейные УЧП первого порядка.** Общий вид нелинейного УЧП первого порядка

$$\mathcal{L}(x, \partial_x u, u) = 0,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n_x$, $\partial_x u = (\partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u)$ а $\mathcal{L}(x,p,u)-$ гладкая вещественная функция( символ оператора $\mathcal{L}$) всех своих $(2n+1)$ аргументов. Чпстный случай этого уравнения

$$\mathcal{L}(x, \partial_x u) = 0 \tag{221}$$

называется уравнением Гамильтона-Якоби, а функция $\mathcal{L}(x,p)$, $x \in R^n_x$, $p \in R^n_p$,-функцией Гамильтона-Якоби или гамильтонианом. Рассмотрим частный случай уравнения Гамильтона-Якоби в пространстве $R^{n+1}_x$, когда $\mathcal{L}$ является линейной функцией по одной из своих переменных $p \in R^{n+1}_p$, например по координате $p_{n+1}$. Обозначим сопряженную $p_{n+1}$ переменную $x_{n+1}$ через $t(x_{n+1} = t)$, считая, что $t-$ физическое время. Тогда уравнение (221) примет вид

$$\mathcal{L}(u) = \partial_t u + H(x_1, \dots, x_n, t, \partial_{x_1} u, \dots, \partial_{x_n} u) = 0 \tag{222}$$

В классической механике принято обозначать в этом случае $u$ через $S(x,t)$ и называть ее действием, а соответствующее уравнение (222)- нестационарным уравнением Гамильтона-Якоби относительно $(n+1)$ переменной $S(x,t)$, где $t \in R^1$- время, а $x = (x_1, \dots, x_n)$-точка конфигурационного пространства $R^n_x$, записывается в виде

$$\partial_t S + H(x, t, \partial_x S) = 0 \tag{223}$$

Здесь $H(x,p,t)-$ функция Гамильтона. Для уравнения (223) поставим задачу Коши с начальным условием

$$S|_{t=0} = S_0(x), \quad x \in \Omega_0 \subset R^n_x, \tag{224}$$

где $S_0(x) \in C^\infty(\Omega_0)$-гладкая функция. Ниже мы приведем алгоритм решения этой задачи, а также постановку и алгоритм решения задачи Коши для случая общего(стационарного) уравнения Гамильтона-Якоби (221).

**Алгоритм решения задачи Коши для нестационарного уравнения Гамильтона-Якоби.** Рассмотрим задача (223), (225)

1. Выпишем характеристическую систему для (223)- систему Гамильтна в $2n$ мерном фазовом пространстве $R^{2n} = R^n_p \times R^n_x$, где $R^n_x$ конфигурационное пространство:

$$\overset{\circ}{x} = \partial_p H(x,t,p), \quad \overset{\circ}{p} = -\partial_x H(x,t,p) \tag{225}$$

задача Коши для которой

$$x|_{t=0} = x_0, \quad p|_{t=0} = \nabla_x S_0(x)|_{x=x_0}, \quad x_0 \in \Omega_0. \tag{226}$$

Найдем $n-$ параметрическое($x_0 - n$ мерный параметр) семейство решений задачи (225), (226) на отрезке $[0,T], \ T>0$,

$$L_{x_0}: \ \{x = X(x_0,t), \quad p = P(x_0,t), \quad 0 \le t \le T. \tag{227}$$

$L_{x_0} \in R^{2n}-$ характеристика или фазовая траектория, стартуюшая из точки $(x_0,p_0)$, где $p_0 = \partial_x S_0(x)$. Проекция $L_{x_0}$ на $R^n_x$ есть луч, или траектория $x = X(x_0,t), \ 0 \le t \le T$, классической частицы, стартующая из точки $x_0$ с начальным импульсом $p_0 = \partial_x S_0(x_0)$.

2. Вычисляем действие на характеристике $L_{x_0}$ :

$$\widetilde{S}(x_0,t) = S_0(x_0) + \int_0^t \left(\langle p, \partial_p H\rangle - H\right)|_{x=X(x_0,\tau),p=P(x_0,\tau)} \, d\tau \tag{228}$$

3. Разрешаем первые $n$ уравнений системы (227) относительно параметра $x_0$, предполагая, что якобиан

$$J_x(x_0,t) = \frac{DX(x_0,t)}{Dx_0} \ne 0 \ \ x_0 \in \Omega_0, \ 0 \le t \le T; \tag{229}$$

$$x = X(x_0,t) \quad \Leftrightarrow \quad x_0 = x_0(x,t).$$

4. Определяем функцию

$$S(x,t) = \widetilde{S}(x_0,t)|_{x_0 = x_0(x,t)}. \tag{230}$$

Теорема 0.74: Пусть функция $H(x,t,p)$ дважды непрерывно дифференцируема по всем своими аргументам, $S_0(x) \in C^2(R^n_x)$ и пусть $|\nabla_p H(x,t,p)| \ne 0$. Тогда формула (230) определяет единственное дифференцируемое по $x,t$ решение задачи Коши (223), (225) в "полосе"$\Pi_{x,t} = \{(x,t) \in R^{n+1}: \ x = X(x_0,t), \ x_0 \in \Omega_0, \ t \in [0,T], \ J_x(x_0,t) \ne 0\}$

**Пример.** Найдем решение задачи Коши

$$\partial_t S + \frac{1}{2m}(\partial_x S)^2 = 0, \quad x \in R^1, !t > 0, \ m > 0,$$

$$S(x,t)|_{t=0} = S_0(x) = \frac{\alpha x^2}{2}, \quad \alpha \in R^1.$$

1). Для $H = \frac{1}{2m}p^2$ имеем систему Гамильтона

$$\overset{\circ}{x} = \partial_p H(x,t,p) = \frac{p}{m}, \quad \overset{\circ}{p} = -\partial_x H(x,t,p) = 0,$$

эквивалентную уравнению Ньютона $m \overset{\circ\circ}{x} = F_x = 0$. Начальные данные

$$x|_{t=0} = x_0, \quad p|_{t=0} = S_0'(x_0) = \alpha x_0, \quad x_0 \in R^1,$$

следовательно функция Гамильтона на фазовой траектории $L_{x_0}$:

$$H|_{L_{x_0}} = \frac{p^2}{2m}|_{L_{x_0}} = \frac{\alpha^2 x^2}{2m} = E_{kin},$$

есть кинетическая энергия частицы массой $m$, движущейся равномерно и прямолинейно

$$x = x_0 + \frac{\alpha x_0}{m} t = X(x_0, t), \quad p = \alpha x_0 = \text{const}\,.$$

2) Вычислим

$$p\partial_p H - H = p\frac{p}{m} - \frac{1}{2m}p^2 = \frac{p^2}{2m},$$

$$\widetilde{S}(x_0, t) = \frac{\alpha x^2}{2} + \int_0^t \frac{p^2}{2m}|_{p=\alpha x_0} dt' = \frac{\alpha x_0^2}{2} + \frac{\alpha^2 x_0^2}{2}\ t,$$

$$x = x_0 + \frac{\alpha x_0}{m} t = x_0(1 + \frac{\alpha t}{m}),$$

Отсюда

$$x_0 = \frac{x}{1 + \frac{\alpha t}{m}} = x_0(x, t),$$

считая, что

$$(1 + \frac{\alpha t}{m}) = J_x(x_0, t) = \partial_{x_0} X(x_0, t) \neq 0. \tag{231}$$

3) Теперь решение исходной заачи(при выполнении условия (231))

$$S(x, t) = \frac{\alpha}{2} x_0^2 (1 + \frac{\alpha t}{m})|_{x_0 = \frac{x}{1+\frac{\alpha t}{m}}} = \frac{\alpha x^2}{2(1 + \frac{\alpha t}{m})^2}(1 + \frac{\alpha t}{m}) = \frac{\alpha x^2}{2(1 + \frac{\alpha t}{m})}.$$

Таким образом, "полоска"$\Pi_{,t} \subset R^2_{x,t}$, в которой существует гладкое решение задачи, завичит от значения параметра $\alpha$. Если $\alpha \geq 0$, то $\Pi^1_x \times [0, \infty)$, если $\alpha < 0$, то $\Pi^1_x \times [0, T]$, где $T < t_{cr} = -\frac{m}{\alpha}$.

Теперь найдем амплитуду классического приближения для уравнения Шредингера с найденной фазой $S(x, t)$.

$$\partial_t \varphi + \partial_x S \partial_x \varphi + \frac{1}{2}\partial_x^2 S = 0, \quad \varphi|_{t=0} = e^{-\beta x^2},\ \beta > 0,$$

где

$$\partial_x S = \frac{\alpha x}{1 + \frac{\alpha}{m} t}, \quad \partial_x^2 S = \frac{\alpha}{1 + \frac{\alpha}{m} t}$$

Тогда луч подчиняется уравнению

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\alpha x}{1 + \frac{\alpha}{m} t} \quad \Rightarrow \quad x = X(x_0, t) = x_0(1 + \frac{\alpha}{m} t)^m.$$

Отсюда $J_x(x_0,t) = \partial_{x_0}X(x_0,t) = (1+\frac{\alpha}{m}t)^m$ и амплитуда

$$\varphi(x,t) = \frac{e^{-\beta x_0^2}}{(1+\frac{\alpha}{m}t)^{m/2}}|_{x_0=x_0(x,t)} = \frac{e^{-\beta x^2(1+\frac{\alpha}{m}t)^{2m}}}{(1+\frac{\alpha}{m}t)^{m/2}}$$

Таким образом, классическое приближение

$$\Psi_{hw}(x,t) = \frac{e^{-\beta x^2(1+\frac{\alpha}{m}t)^{2m}}}{(1+\frac{\alpha}{m}t)^{m/2}}\ e^{\frac{i}{h}\frac{\alpha x^2}{2(1+\frac{\alpha t}{m})}}$$

Посмотрим, как развивается профиль классического приближения. На фронте $\gamma^t = \{x^2(1+\frac{\alpha}{m}t)^{2m} = 2\},\ x = 2/(1+\frac{\alpha}{m}t)^m$. Тогда на фронте

$$\Psi_{hw}(x,t)|_{\gamma^t} = \frac{e^{-2\beta}}{(1+\frac{\alpha}{m}t)^{m/2}}\ e^{\frac{i}{h}\frac{\alpha}{(1+\frac{\alpha t}{m})^{2m+1}}}$$

идет степенное затухание и замедляющаяся осцилляция

$$e^{\frac{i}{h}\frac{\alpha}{(1+\frac{\alpha t}{m})^{2m+1}}} \to 1.$$

**Замечание.** Если рассмотреть более общее уравнение

$$\partial_t S + H(x,t,\partial_x S, S) = 0,$$

то в этом случае алгоритм решения задачи Коши аналогичен. При этом характеристическая система для этого уравнения в пространстве $R^{2n+1}$ имет вид

$$\overset{\circ}{x} = \partial_x H,\quad \overset{\circ}{p} = -\partial_x H - p\partial_S H,\quad \overset{\circ}{S} = \langle p, \partial_x H\rangle - H(x,t,p,S).$$

## 24 Лекция-Упражнение. Алгоритм решения задачи Коши стационарного уравнения Гамильтона-Якоби.

Перейдем к алгоритму решения задачи Коши стационарного уравнения Гамильтона-Якоби

$$H(x,\partial_x S) = 0,\quad x\in R^n. \tag{232}$$

Найти решение уравнение, удовлетворяющее на гладкой гиперповерхности

$$\gamma^{n-1} = \{x:\ x = X^0(\xi),\ \xi = (\xi_1,\dots,\xi_{n-1}) \in \widetilde{D},\ \mathbf{rank}(\frac{\partial X_i^0}{\partial \xi_j}{}_{n\times(n-1)}(\xi) = n-1\}$$

начальным данным

$$S|_{\gamma^{n-1}} = S_0(\xi),\quad \nabla_x S|_{\gamma^{n-1}} = P^0(\xi), \tag{233}$$

1. Выпишим характеристическую систему для уравнения (232)

$$\overset{\circ}{x}= \partial_p H(x,p), \quad \overset{\circ}{p}= -\partial_x H(x,p), \tag{234}$$

где $(x,p) \in R^{2n}$, $\overset{\circ}{x}= dx/d\tau$, $\overset{\circ}{p}= dp/d\tau$, и найти $(n-1)$ параметрическое семейство($\xi -$ $(n-1)$ меиный параметр) решений

$$L_\xi : \ \{x = X(\xi,\tau), \quad p = P(\xi,\tau), \quad |\tau| < \tau_0, \tag{235}$$

с начальными данными

$$x|_{\tau=0} = X^0(\xi), \quad p|_{\tau=0} = P^0(\xi). \tag{236}$$

2. Вычислить действие на характеристике $L_\xi$:

$$\widetilde{S}(\xi,\tau) = S_0(\xi) + \int_0^\tau \langle p, \partial_p H(x,p)\rangle|_{x=X(\xi,\tau'),p=P(\xi,\tau')} d\tau' \tag{237}$$

3. Разрешить первые $n$ уравнений системы (235) относительно $\tau$, $\xi \in R^{n-1}$ в предположении, что выполнено условие

$$J(\xi,\tau) = \frac{DX(\xi,\tau)}{D(\xi,\tau)} \neq 0, \quad \xi \in \widetilde{D}, \ |\tau| < \tau_0 : \tag{238}$$

$$x = X(\xi,\tau) \quad \Leftrightarrow \quad \xi = \xi(x), \ \tau = \tau(x). \tag{239}$$

4. Строим функцию

$$S(x) = \widetilde{S}(\xi,\tau)|_{\xi=\xi(x),\tau=\tau(x)}. \tag{240}$$

Теорема 0.75: Пусть выполнено условие трансверсальности

$$\det\Big( (\frac{\partial X_i^0}{\partial \xi_j}), \nabla_p H(X^0(\xi), P^0(\xi))\Big) \neq 0. \tag{241}$$

Тогда формула (240) определяет единственное гладкое решение задачи Коши (232), (233)

$$V(\gamma) = \{x \in R^n : \ x = X(\xi,\tau), \ \xi \in \widetilde{D}, \ |\tau| < \tau_0, \ J(\xi,\tau) \neq 0\}.$$

**Пример.** Для уравнения эйконала в геометрической оптике

$$(\partial_{x_1} S)^2 + (\partial_{x_1} S)^2 = 1, \quad (x_1, x_2) \in R^2, \tag{242}$$

решим задачу Коши с начальными условиями

$$S|_\gamma = S_0 = 0, \quad \nabla_x S|_\gamma = P^0(\xi), \tag{243}$$

где $\gamma-$ окружность $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Введем естественную параметризацию кривой $\gamma$:

$$x_1 = X_1^0(\xi) = cos\xi, \quad x_2 = X_2^0(\xi) = \sin\xi, \quad \xi \in [0, 2\pi].$$

Найдем вектор $P^0(\xi)$ из условий согласования

$$H(P_1^0, P_2^0) = (P_1^0(\xi))^2 + (P_2^0(\xi))^2 = 1 \tag{244}$$

из (**??**) и (243) следует

$$0 = dS_0 = P_1^0(\xi)dX_1^0(\xi) + P_2^0(\xi)dX_2^0(\xi) = (-P_1^0(\xi)\sin\xi + P_2^0(\xi)\cos\xi)d\xi. \tag{245}$$

Отсюда

$$P_{\pm 1}^0(\xi) = \pm\cos\xi, \quad P_{\pm 2}^0(\xi) = \pm\sin\xi$$

тогда в силу (243) имеем

$$\nabla_x S^{\pm}|_\gamma = \begin{pmatrix} \pm\cos\xi \\ \pm\sin\xi \end{pmatrix} \tag{246}$$

Таким образом, в зависимости от выбора знака($+$ или $-$) мы получим одну из двух задач Коши вила (242)-(245). Решение этих задач будем обозначать через $S^{\pm}(x)$. Следуя алгоритму решения стационарной задачи найдем $S^{\pm}(x)$.

1) Гамильтониан для уравнения (242) имеет вид $H(x,p) = p_1^2 + p_2^2 - 1$. Тогда система Гамильтона

$$\mathring{x}_1 = 2p_1, \quad \mathring{x}_2 = 2p_2, \quad \mathring{p}_1 = 0, \quad \mathring{p}_2 = 0.$$

Начальные условия для нее

$$x_1|_\gamma = \cos\xi, \quad x_2|_\gamma = \sin\xi, \quad p_1^{\pm}|_\gamma = \pm\cos\xi, \quad p_2^{\pm}|_\gamma = \pm\sin\xi.$$

Находим решение полученной задачи Коши

$$x_1^{\pm} = \cos\xi \pm 2\tau\cos\xi = \cos\xi(1\pm 2\tau),\ x_2^{\pm} = \sin\xi \pm 2\tau\sin\xi = \sin\xi(1\pm 2\tau),\ p_1^{\pm} = \pm\cos\xi,\ p_2^{\pm} = \pm\sin\xi \tag{247}$$

2) Вычислим

$$\widetilde{S^{\pm}}(\xi,\tau) = \int_0^\tau (2p_1^2 + 2p_2^2)|_{p_1=\pm\cos\xi, p_2=\pm\sin\xi} d\tau' =$$

$$= \int_0^\tau 3((\pm\cos\xi)^2 + (\pm\sin\xi)^2)d\tau' = \int_0^\tau 2\cdot 1 d\tau' = 2\tau.$$

3) Разрешим первые два уравнения системы (247) относительно $\tau$. Возведя в квадрат и сложив обе части этих уравнений, находим

$$\tau_1^{\pm} = \frac{\sqrt{x_1 2 + x_2^2} - 1}{\pm 2}, \quad \tau_2^{\pm} = \frac{-\sqrt{x_1 2 + x_2^2} - 1}{\pm 2} \tag{248}$$

ПРи этом якобиан имеет вид

$$J^{\pm} = \det\begin{pmatrix} -\sin\xi(1\pm\tau) & \pm 2\cos\xi \\ \cos\xi(1\pm 2\tau) & \pm 2\sin\xi \end{pmatrix} = -(\pm 2) - 4\tau$$

4) Очевидно, что второй из корней (248) не удовлетворяет начальному условию. Тогда

$$S^{\pm}(x) = \pm\sqrt{x_1^2 + x_2^2} - (\pm 1).$$

**Замечание.** Задача Коши для нестационарного уравнения Гамильтона-Якоби

$$\partial_t S + H(x, t, \partial_x S) = 0 \tag{249}$$

и алгоритм его решения являются частным случаем задачи Коши для общего(стационарного) уравнения Гамильтона-Якоби (249) и стационарного алгоритма соответственно. Действительно, полный гамильтониан $\mathcal{H}$, отвечающий уравнению (249), есть функция, определенная на расширенном пространстве $R^{2n+2} = R^{2n}_{x,p} \times R^2_{p_t,t}$ вида

$$\mathcal{H}(x, t, p, p_t) = p_t + H(x, t, p), \tag{250}$$

и уравнение (249) принимает вид

$$\mathcal{H}(x, t, \partial_x S, \partial_t S) = 0$$

Соответствующая система Гамильтона в $R^{2n+2}$ имеет вид

$$\overset{\circ}{x} = \partial_p \mathcal{H}(x, t, p, p_t) = \partial_p H(x, t, p), \quad \overset{\circ}{p} = -\partial_x \mathcal{H}(x, t, p, p_t) = -\partial_x H(x, t, p), \tag{251}$$

$$\overset{\circ}{p_t} = -\partial_t \mathcal{H}(x, t, p, p_t) = -\partial_t H(x, t, p), \quad \overset{\circ}{t} = 1 \tag{252}$$

(здесь точка означает дифференцирование по параметру $\tau$, например, $\overset{\circ}{p_t} = dp_t/d\tau$). Проекцию фазовой траектории системы (251), (252) на конфигурацтонное пространство $R^{n+1}_{x,t}$ в этом случае. Интегрирование системы Гамильтона (251), (252), очевидно, эквивалентно(если считать что $\tau = t$) интегрированию усеченной системы Гамильтона в $2n-$ мерном фазовом пространстве $R^{2n}x, p$ с гамильтонианом $H(x, t, p)$, которая и использовалась в нестационарном алгоритме.

**Обоснование алгоритмов решения задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби.**

Лемма 0.22 (Лемма Гамильтона(нестационарный вариант)): Импульс на фазовой траектории равен градиенту действия на луче.

Иными словами, в точке $x = X(x_0, t)$, чвляющейся проекцией точки $(X(x_0, t), P(x_0, t))$ фазовой траектории $L_{x_0}$ на конфигурационное пространство, в любой момент времени $t \in [0, T]$ при выполнении условия $J_x(x_0, t) \neq 0$ имеет место равенство

$$P(x_0, t) = \nabla_x S(X(x_0, t), t), \tag{253}$$

где функция $S(x, t)$ определяется формулами нестационарного алгоритма. Проведем доказательство для $n = 1 (x \in R^1)$(для случая $n \geq 2$ доказательство аналогично). В силу нестационарного алгоритма

$$S(X(x_0, t), t) = \widetilde{S}(x_0, t) = S_0(x_0) + \int_0^t (\langle p, \partial_p H \rangle - H)|_{x=X(x_0,t), p=P(x_0,t)} dt' \tag{254}$$

где скалярное произведение

$$\langle p, \partial_p H \rangle = p \partial_p H(x,t,p).$$

Продифференцируем равенство (254) по параметру $x_0$, используя при этом систему Гамильтона

$$\partial_x S(X(x_0,t),t)\ \partial_{x_0} X(x_0,t) = \partial_{x_0} S_0(x_0) + \tag{255}$$

$$\int_0^t\ (\partial_{x_0} P(x_0,t')\partial_p H + P\partial_{x_0} H - \partial_x H \partial_{x_0} X(x_0,t') - \partial_p H \partial_{x_0} P(x_0,t'))dt' =$$

$$= \partial_{x_0} S_0(x_0) + \int_0^t\ (P\partial_{x_0} H - \partial_x H \partial_{x_0} X(x_0,t'))dt' =$$

$$= \partial_{x_0} S_0(x_0) + \int_0^t\ \partial_{t'}(P(x_0,t')\partial_{x_0} X(x_0,t'))dt' =$$

$$= \partial_{x_0} S_0(x_0) + P(x_0,t)\partial_{x_0} X(x_0,t) - P(x_0,0)\partial_{x_0} X(x_0,0).$$

В силу того, что $\partial_{x_0} X(x_0,0) = 1$ и $P(x_0,0) = \partial_{x_0} S_0(x_0)$ имеет место равенство

$$\partial_x S(X(x_0,t),t)\ \partial_{x_0} X(x_0,t) = P(x_0,t)\partial_{x_0} X(x_0,t),$$

которое эквивалентно (253), поскольку из условия $J_x(x_0,t) = \partial_{x_0} X(x_0,t) \neq 0$ для любых $x_0 \in R$ и любых $t \in [0,T]$.

Лемма 0.23 (Лемма Гамильтона(стационарный вариант)): Пусть выполнено условие трансверсально

$$\det\Big( (\frac{\partial X_i^0}{\partial \xi_j}), \nabla_p H(X^0(\xi), P^0(\xi)) \Big) \neq 0. \tag{256}$$

Тогда импульс на фазовой траектории равен градиенту эйконала на луче.

Иными словами, в точке $x = X(\xi,\tau)$, являющейся проекцией точки $(X(\xi,\tau), P(\xi,\tau)$ фазовой траектории $L_\xi$ на когфигурационное пространство, в любой момент времени $\tau$ такой, что $|\tau| < \tau_0$, при выполнении условия $J(\xi,\tau) \neq$ имеет место равенство

$$P(\xi,\tau) = \partial_x S(X(\xi,\tau)), \tag{257}$$

где функция $S(x)$ определяется формулой (240). Проведем доказательство для случая $n = 2(\ x \in R^2)$(для случая $n = 1$ и $n > 2$ доказательство аналогично). В силу стационарного алгоритма

$$S(X(\xi,\tau)) = \widetilde{S}(\xi,\tau) = S_0(\xi) + \int_0^\tau\ \langle p, \partial_p H(x,p) \rangle|_{x=X(\xi,\tau'),p=P(\xi,\tau')} d\tau' \tag{258}$$

где скалярное произведение

$$\langle p, \partial_p H \rangle = p\partial_p H(x,p).$$

Продифференцируя равенство (258) по параметру $x_0$(по аналогии с дифференцированием равенство (254) по параметру $x_0$,), используя при этом систему Гамильтона, получим аналогию соотношений (255), из которго следует требуемый результат.

**Обоснование нестационарного алгоритма.** Докажем, что функция $S(x,t)$, задаваемая формулой

$$S(x,t) = \widetilde{S}(x_0,t)|_{x_0=x_0(x,t)} \tag{259}$$

является решением задачи Коши для стационарного уравнения Гамильтона-Якоби. По построению имеем

$$S(x,t)|_{t=0} = \widetilde{S}(x_0,0)|_{x_0=x_0(x,0)} = S_0(x_0)|_{x_0=x_0(x,0)} = S_0(x).$$

Покажем, что $S(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t S(x,t) + H(x,t,\partial_x S(x,t)) = 0.$$

Для этого продифференцируем равенство (259) по $t$

$$\langle \partial_x S, \partial_t X(x_0,t)\rangle + \partial_t S(X(x_0,t),t) =$$

$$\langle P(x_0,t), \partial_p H(X(x_0,t),t,P(x_0,t))\rangle - H(X(x_0,t),t,P(x_0,t)) =$$

$$= \langle P(x_0,t), \overset{\circ}{X}\rangle - H(X(x_0,t),t,P(x_0,t)).$$

С учетом лемы Гамильтона$(\partial_x S(X(x_0,t),t) = P(x_0,t))$ последнее соотношение примет вид

$$\partial_t S(X(x_0,t),t) + H(X(x_0,t),t,P(x_0,t)) = 0, \quad \forall x_0 \in \Omega_0,\ \forall t \in [0,T],$$

что и требовалось доказать.

**Пример классического приближения для волнового уравнения.** Рассмотрим случай $n=1$. Тогда уравнение эйконала

$$(\partial_t S)^2 - a^2(x)(\partial_x S)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_t S \ \pm a(x)\partial_x S = 0, \quad x \in R^1,\ t > 0, \tag{260}$$

$$S|_{t=0} = -\frac{1}{2}\beta x^2. \tag{261}$$

Гамильтониан $H^{\pm}(x,p) = p_2 \pm a(x)p_1$. Система характеристик определяется уравнением

$$\frac{dX^{\pm}}{d\tau} = \partial_{p_1} H = \pm a(X^{\pm}), \quad \frac{dt}{d\tau} = \partial_{p_2} H = 1,$$

$$\frac{dP_1^{\pm}}{d\tau} = -(\pm a'(X^{\pm})P_1^{\pm}),\ \frac{dP_2^{\pm}}{d\tau} = 0,$$

$$X^{\pm}|_{\tau=0} = x_0,\ t|_{\tau=0} = 0, \quad P_1^{\pm}|_{\tau=0} = -\beta x_0,\ P_2^{\pm}|_{\tau=0} = 0$$

Отсюда

$$\frac{dP_1^{\pm}}{P_1^{\pm}} = -(\pm a'(X^{\pm}))d\tau = -\frac{a'(X^{\pm})}{a(X^{\pm})}dX^{\pm}$$

Интегрируя, получим $P_1^{\pm}(x_0,t)a(X^{\pm}(x_0,t)) = -\beta x_0 a(x_0)$. Таким образом, траектория:

$$\pm t = \int_{x_0}^{X^{\pm}(x_0,t)} \frac{d\mu}{a(\mu)}, \quad t = \tau, \tag{262}$$

$$P_1^{\pm}(x_0,t) = -\frac{\beta x_0 a(x_0)}{a(X^{\pm}(x_0,t))}, \quad P_2^{\pm} \equiv 0. \tag{263}$$

Если $X(x_0,s)$– решение уравнения $s = \int_{x_0}^{X(x_0,t)} \frac{d\mu}{a(\mu)}$, то

$$X^{\pm}(x_0,t) = X(x_0, \pm t).$$

Якобиан $J_x^{\pm}(x_0,t) = \partial_{x_0} X^{\pm}(x_0,t) = \frac{a(X^{\pm}(x_0,t))}{a(x_0)} \neq 0$, поэтому уравнение (262) разрешимо относительно $x_0$: $x_0 = x_0(x, \pm t)$.

Действие

$$\widetilde{S^{\pm}}(x_0,t) = -\frac{1}{2}\beta x_0^2 + \pm \int_0^t a(X(x_0, \pm s))P^{\pm}(x_0,s)ds = -\frac{1}{2}\beta[x_0^2 \ \pm 2x_0 a(x_0)t]$$

Теперь можно определить фазу

$$S^{\pm}(x,t) = -\frac{1}{2}\beta[x_0^2 \ \pm 2x_0 a(x_0)t]|_{x_0 = x_0^{\pm}(x,t)}$$

Уравнение для амплитуды

$$\partial_t S^{\pm}\partial_t\varphi^{\pm} \ - a^2(x)\partial_x S^{\pm}\partial_x\varphi^{\pm} + \varphi^{\pm}\Box_a S^{\pm} = 0$$

$$\varphi^{\pm}|_{t=0} = e^{-\alpha x^2}$$

В этом случае система для характеристик

$$\frac{dX^{\pm}}{d\tau} = -a^2(X^{\pm})\partial_x S^{\pm}(X^{\pm}, t^{\pm}), \quad \frac{dt^{\pm}}{d\tau} = \partial_t S(X^{\pm}, t^{\pm}),$$

$$X^{\pm}|_{\tau=0} = x_0, \quad t^{\pm}|_{\tau=0} = 0$$

амплитуда

$$\varphi(x,t) = \frac{a(X(x_0,t))}{a(x_0)} \frac{e^{-\alpha x_0^2}}{\sqrt{J_x(x_0,t)}}|_{x_0 = x_0^{\pm}(x,t)}$$

**Задание–досчитать!!!!!**

**Просчитать в аудитории несколько примеров классического приближения для уравнений Шредингера и волнового уравненя.**

## Список литературы

[1] *В. И. Арнольд* Математические методы классической механики// Эдиториал УРСС, Москва(2000)

[2] *А. Ф. Филлипов* Введение в теорию дифференциальных уравнений// УРСС(Москва), 2004

[3] *Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний// М. Наука(1974)

[4] *А. Ф. Филлипов* Асимптотические и качественные методы в теории дифференциальных уравнений и приложениях// Учебно-методическая разработка, изд. МГУ(1990)

[5] *А. Ф. Филлипов* Сборник задач по дифференциальным уравнениям, М. Наука(1985)

[6] Конспекты лекций по математическим методам физики, под редакцией *В. В. Белова, С. Ю. Доброхотова*(2006)й