УДК 517.958:530.1,517.958:532.5

Лекционный курс: Методы математической физики.

В. В. Палин, Е. В. Радкевич

9 ноября 2010 г.

Оглавление

Введение.

Основной целью годового лекционного курса является изучение современного математического аппарата, используемого для моделирования физических процессов. Наши задачи – изучить аппарат уравнений с частными производными, используемый при описании физических процессов; проиллюстрировать возникновение уравнений с частными производными при описании таких процессов; научиться строить решения полученных уравнений, анализировать их свойства, а также давать физическую интерпретацию полученным результатам.

Лекционный курс можно мысленно структурировать различными способами. Наиболее крупное разделение курса – семестровое, на две части. При этом основная тематика первого семестра – уравнения с частными производными первого порядка, в том числе нелинейные. Второй семестр соответствует более классическому курсу уравнений с частными производными второго порядка.

Одним из основных достижений математического анализа XIX века состоит в том, что решение уравнения с частными производными (УрЧП) первого порядка можно свести к решению соответствующей этому уравнению характеристической системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка. С физической точки зрения этот факт есть проявление двойственности при описании волновых процессов: поведение физической системы можно описывать как при помощи волновых фронтов (решений УрЧП) так и при помощи описания траекторий частиц в конфигурационном пространстве системы (решений характеристической системы ОДУ). Траектории частиц могут с течением времени пересекаться, касаться друг друга, собираться в одну точку, образуя множества в конфигурационном пространстве, которые, следуя терминологии геометрической оптики, называют фокальными точками или каустиками (точками поворота в квантовой механике). Оказывается, что при возникновении такого рода особенностей решения соответствующих УрЧП теряют гладкость, у них появляются разрывы для самой функции или ее производных. Этот эффект принято называть катастрофами для решений. Задачи, в которых происходят катастрофы решений соответствующих УрЧП, возникают при анализе распространения ударных волн в механике сплошной среды, в частности, в моделях газовой динамики и магнитной гидродинамики; при описании распространения и фокусировки радиоимпульсов в диспергирующих средах; при описании распространения коротких радиоволн в ионосфере Земли; при изучении дифракции на проводящих телах; а также при анализе распространения лазерного электромагнитного излучения в лабораторной плазме.

Обзор курса первого семестра.

В связи со сказанным выше, естественным образом построен курс первого семестра. В начале курса первые две темы посвящены разделам теории обыкновенных дифференциальных уравнений, которые будут активно использоваться в дальнейшем изложении – решениям дифференциальных уравнений, зависящих от параметра, и понятию первого интеграла. В случае, если эти разделы уже хорошо знакомы, их можно опустить.

Третья тема посвящена связи между линейным (квазилинейным) УрЧП первого порядка и соответствующей ему системе характеристических ОДУ.

Основная задача четвертой темы – дать в виде алгоритмов методы решения задачи Коши для линейных и квазилинейных УрЧП. Кроме того, в конце четвертой темы приводится два примера применения описанных алгоритмам к задачам, имеющим физическую природу – интегрирование уравнений неразрывности и переноса.

Пятая тема посвящена изучению метода характеристик для интегрирования задачи Коши, соответствующей нелинейному УрЧП первого порядка. В последнем пункте пятой темы также приводится пример задачи Коши для нелинейного УрЧП первого порядка, где возникает катастрофа решения.

Шестая тема первого семестра посвящена изучению классических решений задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби. Обсуждаются алгоритмы интегрирования задачи Коши для стационарного и нестационарного уравнений; связь системы ОДУ Гамильтона с вариационным исчислением; преобразование Лежандра; геометрическая интерпретация решения задачи Коши для нестационарного уравнения Гамильтона-Якоби. В последнем пункте на эвристическом уровне излагается связь между геометрической оптикой и лагранжевой механикой, а также доказывается принцип Гюйгенса и устанавливается связь между траекториями частиц в фазовом пространстве системы и волновыми фронтами.

Седьмая тема посвящена методу коротковолновых асимптотик. Оказывается, что при определенных условиях на параметры волнового процесса и параметры среды в первом приближении, которое называют коротковолновым, фаза асимптотики волнового поля – функция $S(t,x)$ – удовлетворяет уравнению Гамильтона-Якоби для волновых фронтов, а следующее приближение приводит к УрЧП первого порядка для определения амплитуды колебаний $\phi(t,x)$. В качестве иллюстрации метода производится построение коротковолновых асимптотик для уравнения Шредингера и волнового уравнения.

Восьмая тема первого семестра – задача Коши для одномерного закона сохранения. Как было показано в конце пятой темы, для закона сохранения даже для сколь угодно гладких данных Коши может произойти катастрофа решения, т.е. решение потеряет гладкость в некоторый момент времени. Отсюда естественным образом возникает понятие обобщенного решения. Выводятся условия Рэнкина-Гюгонио на кусочно-гладкие решения в смысле интегрального тождества. Также в этой теме обсуждается неединственность интегрального решения, и вводится условие энтропии, как условие отбора того интегрального решения, которое в некотором смысле наследует свойства классического решения.

Девятая тема первого семестра посвящена введению в теорию обобщенных функций, которые естественным образом возникли в восьмой теме. Обсуждаются понятия носителя и носителя сингулярности обобщенной функции, сходимость и дифференцирование обобщенных функций, а также свертка обобщенной и пробной функций.

Далее следуют три дополнительные темы первого семестра, которые могут быть либо использованы в курсе в полной мере, либо оставлены для самостоятельного изучения любознательными студентами, либо изложены в виде формулировок. Первая из этих тем является иллюстрацией применения аппарата дифференцирования решений ОДУ по параметру, и посвящена отысканию периодических решений для системы ОДУ, близкой к линейной. Вторая тема иллюстрирует понятие катастрофы решения, и посвящена задаче Римана о распаде разрыва. Третья тема, наиболее трудная, посвящена решениям почти всюду для задачи Коши для нестационарного уравнения Гамильтона-Якоби специального вида и для одномерного закона сохранения. В этой теме доказываются формулы Хопфа-Лакса и Лакса-Олейник, позволяющие получить решения соответствующих задач Коши как решения задачи минимизации специального вида.

Глава 1

Качественные свойства решений ОДУ.

1.1 Дифференцируемость решения ОДУ по параметру и ее применение.

1.1.1 Непрерывная зависимость решения от параметра.

Теорема 1.1.1 *Пусть решение $x = \phi(t)$ задачи $\dot{x} = f(t, x)$, $x(t_0) = x_0$ существует на интервале $I = [t_*, t_1] \ni t_0$, и в окрестности $V = \{t \in I,\ |x - \phi(t)| < \varrho\}$ его графика вектор-функция $f(t, x)$ и $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ непрерывны. Тогда $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что для любой другой задачи $\dot{y} = g(t, y)$, $y(t_0) = y_0$ в которой g и $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ непрерывны и $|g - f| < \delta$ в V, $|y_0 - x_0| < \delta$, решение $y(t)$ может быть продолжено на I и $|y(t) - \phi(t)| < \varepsilon$ на I.*

Доказательство. V – замкнутое ограниченное множество; f и $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны на V. Значит, найдутся константы m, l такие, что $|f(t, x)| \le m$, $|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}| \le l$. Тогда если $(t, x) \in V$, $(t, y) \in V$, то

$$|f(t, x) - f(t, y)| \le |\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \cdot (x_j - y_j)| \le nl|x - y|.$$

Отсюда, т.к. $|f(t, y) - g(t, y)| \le \delta$, то для $x = \phi(t)$ и $y(t)$ на отрезке $I_1 \subseteq I$, пока график $y(t)$ проходит в V, имеем

$$|\dot{x} - \dot{y}| = |f(t, x) - g(t, y)| \le nl|x - y| + \delta.$$

Пусть $z(t) = \phi(t) - y(t)$. Тогда $|z(t_0)| \le \delta$, $|\dot{z}| \le nl|z| + \delta$ на I_1. Отсюда

$$|\phi(t) - y(t)| = |z(t)| \le \delta e^{nls} + \frac{\delta}{nl}(e^{nls} - 1),\ s = \max\{t_1 - t_0, t_1 - t_*\} \tag{1.1}$$

Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_1 = \min\{\varrho, \varepsilon\}$, и выберем $\delta > 0$ так, чтобы правая часть (1.1) была меньше ε_1. Тогда решение $y(t)$, т.ч. $|y_0 - x_0| \leq \delta$ проходит внутри трубки $T = \{t \in I_1,\ |x - \phi(t)| \leq \varepsilon_1\}$, $T \subseteq V$. По теореме о продолжении, решение $y(t)$ может быть продолжено до выхода на границу трубки T. Если бы оно вышло на боковую границу трубки, то нашлось бы такое $\tau \in I_1$, что $|y(\tau) - \phi(\tau)| = \varepsilon_1$, что противоречит выбору δ. Таким образом, решение $y(t)$ выходит из трубки T только на ее концах, а значит, оно может быть продолжено на трубку $T_* = \{t \in I,\ |x - \phi(t)| \leq \varepsilon_1\}$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим теперь задачу с параметром $\mu \in M$, $M \subseteq \mathbb{R}^d$:

$$\dot{x} = f(t, x, \mu),\ x(t_0) = a(\mu). \tag{1.2}$$

Если f, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны по t, x, то $\forall \mu \in M$ существует решение $x = \phi(t, \mu)$ задачи (1.2).

Теорема 1.1.2 *Пусть при $\mu = \mu_0$ существует решение (1.2) на $I = [t_*, t_1]$, и в окрестности $V = \{t \in I,\ |x - \phi(t, \mu_0)| \leq \varrho\}$ его графика при $\mu \in M$ вектор-функция $f(t, x, \mu)$ и $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ непрерывны по t, x, μ, функция $a(\mu)$ непрерывна по μ. Тогда найдется $\eta > 0$ такое, что функция $\phi(t, \mu)$ непрерывна по t, μ при $t \in I,\ |\mu - \mu_0| < \eta$.*

Доказательство. А) Непрерывность по μ. При фиксированном $\mu = \mu_0$ задача (1.2) удовлетворяет условиям теоремы 1.1.1. Значит, для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $|f(t, x, \mu) - f(t, x, \mu_0)| \leq \delta$ для $(t, x) \in V$, $|a(\mu) - a(\mu_0)| \leq \delta$, то решение $\phi(t, \mu)$ существует при $t \in I$ и $|\phi(t, \mu) - \phi(t, \mu_0)| < \varepsilon$. Пусть M_0 – замкнутая окрестность μ_0, $M_0 \subseteq M$. Так как $f(t, x, \mu)$ и $a(\mu)$ непрерывны при $(t, x) \in V$, $\mu \in M_0$, то они равномерно непрерывны. Отсюда найдется $\eta > 0$ такое, что при $|\mu - \mu_0| < \eta$ имеем $\mu \in M_0$ и из равномерной непрерывности $|f(t, x, \mu) - f(t, x, \mu_0)| \leq \delta$, $|a(\mu) - a(\mu_0)| \leq \delta$. Отсюда по теореме 1.1.1 функция $\phi(t, \mu)$ определена на интервале I и удовлетворяет неравенству $|\phi(t, \mu) - \phi(t, \mu_0)| < \varepsilon$, что и означает непрерывность по μ в точке $\mu = \mu_0$.
Б) Непрерывность по x при $\mu = \mu_0$. При $(t, x) \in V$, $|\mu - \mu_0| \leq \eta$ функция f непрерывна. Следовательно, она ограничена на указанном множестве, т.е. найдется q такое, что $|f| < q$. Отсюда $|\frac{\partial \phi}{\partial t}| = |f| \leq q$ и $\forall t, \tau \in I$ при $|t - \tau| \leq \frac{\varepsilon}{q}$ имеем $|\phi(t, \mu) - \phi(\tau, \mu)| \leq q|\tau - t| \leq \varepsilon$. Отсюда и из неравенства $|\phi(t, \mu) - \phi(t, \mu_0)| < \varepsilon$ при $|\mu - \mu_0| \leq \eta$, $|t - \tau| \leq \frac{\varepsilon}{q}$ следует $|\phi(\tau, \mu) - \phi(t, \mu_0)| < 2\varepsilon$. Следовательно, решение $\phi(t, \mu)$ непрерывно по совокупности переменных при $\mu = \mu_0$, $t \in I$.
В) Распространение на $\mu \neq \mu_0$. Пусть $\varepsilon \in (0, \varrho)$. Тогда найдется $\eta_1 \in (0, \eta)$ такое, что при любом μ_1, удовлетворяющем неравенству $|\mu_1 - \mu_0| \leq \eta_1$ по доказанному, решение $\phi(t, \mu_1)$ определено на I и удовлетворяет неравенству $|\phi(t, \mu_1) - \phi(t, \mu_0)| <$

ε. Тогда его окрестность $V_1 = \{t \in I,\ |x - \phi(t, \mu_1)| \le \varrho - \varepsilon\}$ содержится в V. Значит, в окрестности V_1 выполнены условия пунктов А,Б доказательства с μ_1 вместо μ_0. Таким образом, решение $\phi(t, \mu)$ непрерывно по t, μ при $\mu = \mu_1$.
Теорема доказана.

1.1.2 Дифференцируемость решения по параметру.

Обозначим D – область в $\mathbb{R}^{n+1}$, M – интервал в $\mathbb{R}$.

Теорема 1.1.3 *Пусть при $(t, x) \in D$, $\mu \in M$ все функции f, $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$, $\frac{\partial f_i}{\partial \mu}$, $a'(\mu)$ непрерывны. Пусть также для любого $\mu \in M$ на $[t_1, t_2] \ni t_0$ решение задачи (1.2) существует, и его график проходит в области D. Тогда это решение имеет производные $\frac{\partial x_i}{\partial \mu}$, непрерывные по t, μ. Функции $u_i = \frac{\partial x_i}{\partial \mu}$ удовлетворяют системе уравнений в вариациях*

$$\frac{du_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j + \frac{\partial f_i}{\partial \mu},\ u_i(t_0) = a_i'(\mu) \tag{1.3}$$

Доказательство. Зафиксируем $\mu \in M$. По определению производной,

$$\frac{\partial x}{\partial \mu} = \lim_{\tilde{\mu} \to \mu} \frac{\tilde{x} - x}{\tilde{\mu} - \mu},$$

где $\tilde{x} = x(t, \tilde{\mu})$. Обозначим $v(t, \tilde{\mu}) = \frac{\tilde{x} - x}{\tilde{\mu} - \mu}$. Идея доказательства теоремы заключается в том, чтобы составить дифференциальное уравнение для $v(t, \tilde{\mu})$ при $\tilde{\mu} \ne \mu$ и воспользоваться теоремой о непрерывности по параметру. Реализуем эту идею:

$$\frac{dv(t, \tilde{\mu})}{dt} = \frac{f(t, \tilde{x}, \tilde{\mu}) - f(t, x, \mu)}{\tilde{\mu} - \mu},\ v(t_0, \mu) = \frac{a(\tilde{\mu}) - a(\mu)}{\tilde{\mu} - \mu}.$$

Положим $F(s) = f(t, x + s(\tilde{x} - x), \mu + s(\tilde{\mu} - \mu))$. Тогда $f(t, \tilde{x}, \tilde{\mu}) - f(t, x, \mu) = F(1) - F(0) = \int_0^1 F'(s) ds$, $F'(s) = \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x} - x) + \frac{\partial f}{\partial \mu}(\tilde{\mu} - \mu)$. Отсюда

$$\frac{dv}{dt} = \frac{1}{\tilde{\mu} - \mu} \int_0^1 F'(s) ds = \int_0^1 \frac{\partial f(t, x + s(\tilde{x} - x), \mu + s(\tilde{\mu} - \mu))}{\partial (x + s(\tilde{x} - x))} ds \cdot \frac{\tilde{x} - x}{\tilde{\mu} - \mu} +$$

$$+ \int_0^1 \frac{\partial f(t, x + s(\tilde{x} - x), \mu + s(\tilde{\mu} - \mu))}{\partial (\mu + s(\tilde{\mu} - \mu))} ds.$$

Так как $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial \mu}$ непрерывны по совокупности переменных, то подынтегральные функции непрерывны по $t, x, \tilde{x}, \mu, \tilde{\mu}, s$, а интегралы – по $t, x, \tilde{x}, \mu, \tilde{\mu}$. Кроме того, по теореме 1.1.2 функция $\tilde{x}$ непрерывна по $t, \tilde{\mu}$. Следовательно, последние два интеграла – непрерывные функции от $t, \tilde{\mu}$, в том числе, в точке $\tilde{\mu} = \mu$. Обозначая $H(t,\tilde{\mu}) = \int_0^1 \frac{\partial f(t,x+s(\tilde{x}-x),\mu+s(\tilde{\mu}-\mu))}{\partial(x+s(\tilde{x}-x))}ds$, $h(t,\tilde{\mu}) = \int_0^1 \frac{\partial f(t,x+s(\tilde{x}-x),\mu+s(\tilde{\mu}-\mu))}{\partial(\mu+s(\tilde{\mu}-\mu))}ds$, получаем

$$\frac{dv}{dt} = H(t,\tilde{\mu})v + h(t,\tilde{\mu}). \tag{1.4}$$

Доопределим $v(t,\tilde{\mu})$ при $\tilde{\mu} = \mu$ как решение (1.4) с начальным условием $v(t_0,\mu) = a'(\mu)$. По теореме 1.1.2 функция $v(t,\tilde{\mu})$ непрерывна по $\tilde{\mu}$, включая $\tilde{\mu} = \mu$. При $\tilde{\mu} = \mu$ подынтегральные выражения в формулах для $H(t,\tilde{\mu})$ и $h(t,\tilde{\mu})$ не зависят от s и равны $H(t,\mu) = \frac{\partial f}{\partial x}$, $h(t,\mu) = \frac{\partial f}{\partial \mu}$. Таким образом, для функции $v(t,\mu)$ уравнение и начальное условие совпадают с (1.3).
Пусть теперь μ меняется на интервале M. Тогда правые части системы (1.3) и частные производные по u_j от них непрерывны по t,μ. По теореме 1.1.2 решение системы (1.3) будет также непрерывно по t,μ.
Теорема доказана.

Следствие 1.1.1 *Пусть выполнены условия теоремы 1.1.3 и, кроме того, функции f_i, $a_i(\mu)$ имеют непрерывные производные по x,μ до порядка $m \geq 2$ включительно, в том числе смешанные производные. Тогда решение $x(t,\mu)$ имеет непрерывные по t,μ производные по μ до порядка m включительно.*

Следствие 1.1.2 *Пусть выполнены условия предыдущего следствия, и пусть $(t,x) \in D$, $|\mu| < \mu_1$ и при $\mu = 0$, $t \in [t_1,t_2]$ график решения задачи (1.2) проходит в D, $t_0 \in [t_1,t_2]$. Тогда решение $x(t,\mu)$ задачи (1.2) при $t \in [t_1,t_2]$ разлагается по формуле Тейлора по степеням параметра μ вплоть до μ^m:*

$$x(t,\mu) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \mu^2 v_2(t) + \dots + \mu^m v_m(t) + \bar{o}(\mu^m).$$

1.1.3 Примеры и упражнения.

<u>А.</u> Найти $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=0}$, если

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + 4t\mu + \mu^2, \; x(1) = 2\mu - 1.$$

<u>Решение.</u> По теореме 1.1.3 для функции $u = \frac{\partial x}{\partial \mu}$ имеем:

$$\frac{du}{dt} = 2xu + 4t + 2\mu, \; u(1) = 2.$$

При этом $\mu = 0$, x – решение уравнения $\dot{x} = x^2$ с начальным условием $x(1) = -1$, т.е. $x(t) = -\frac{1}{t}$. Отсюда

$$\frac{du}{dt} = -2\frac{u}{t} + 4t, \; u(1) = 2.$$

Решая это линейное уравнение, получаем $u = t^2 + Ct^{-2}$, и из начального условия $C = 1$, откуда $\frac{\partial x}{\partial \mu}\Big|_{\mu=0} = t^2 + t^{-2}$.
Ответ: $t^2 + t^{-2}$.

Б. Найти разложение решения задачи $\dot{x} = \frac{t}{x} - 2\mu t^2,\ x(1) = 1 - \frac{\mu}{2} + \frac{\mu^2}{8}$ по степеням μ вплоть до μ^2.
Решение. Возьмем $D = \{t > 0, x > 0\}$. В этой области выполняются условия следствия 1.2 для любого μ. Положим

$$x(t,\mu) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \mu^2 v_2(t) + \bar{o}(\mu^2).$$

Подставляя это равенство в уравнение, имеем:

$$\dot{v}_0 + \mu\dot{v}_1 + \mu^2\dot{v}_2 + \bar{o}(\mu^2) = \frac{t}{v_0 + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + \bar{o}(\mu^2)} - 2\mu t^2,$$
$$v_0(1) + \mu v_1(1) + \mu^2 v_2(1) = 1 - \frac{\mu}{2} + \frac{\mu^2}{8} \tag{1.5}$$

Найдем v_0, для этого подставим $\mu = 0$ в равенство (1.5):

$$\dot{v}_0 = \frac{t}{v_0},\ v_0(1) = 1,$$

откуда $v_0(t) = t$. Найдем v_1, для этого продифференцируем (1.5) по μ и подставим $\mu = 0$:

$$\dot{v}_1 = -\frac{tv_1}{v_0^2} - 2t^2,\ v_1(1) = -\frac{1}{2},$$

откуда $v_1(t) = -\frac{1}{2}t^3$. Аналогично для v_2 получаем

$$2\dot{v}_2 = t\ (-\frac{v_1 + 2\mu v_2 + \bar{o}(\mu)}{(v_0 + \mu v_1 + \mu^2 v_2 + \bar{o}(\mu^2))^2})'_\mu\Big|_{\mu=0},$$

$$2\dot{v}_2 = -t\frac{2v_2v_0^2 - 2v_0v_1^2}{v_0^4},\ v_2(1) = \frac{1}{8}.$$

Отсюда $v_2(t) = \frac{1}{12t} + \frac{t^5}{24}$.
Ответ:

$$x(t,\mu) = t - \frac{\mu}{2}t^3 + \mu^2(\frac{1}{12t} + \frac{t^5}{24}) + \bar{o}(\mu^2).$$

Упражнения. 1. Обосновать переход к неравенству (1.1) в теореме 1.1.1.
2. Доказать следствие 1.1. Указание: применить метод математической индукции по m.
3. Проверить выкладки при решении ОДУ в примерах А,Б.

4. Обосновать возможность нахождения уравнений для v_j в примере Б путем дифференцирования равенства (1.5) по μ и подстановки $\mu = 0$.

Литература:

А.Ф.Филиппов, „Введение в теорию дифференциальных уравнений“, §7, §23, §24

1.2 Первые интегралы для ОДУ.

1.2.1 Первые интегралы и интегральные кривые.

Рассмотрим систему ОДУ

$$\dot{x} = f(t, x), \tag{1.6}$$

$x\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $f\colon \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1$.

Определение 1.2.1 Интегральной кривой *системы (1.6) называется график $(t, x(t))$ функции $x(t)$ – решения (1.6).*

Определение 1.2.2 Первым интегралом *системы (1.6) в области D называется функция $v(t, x) \in C^1$, сохраняющая постоянное значение вдоль каждой проходящей в D интегральной кривой системы (1.6), то есть для любой кривой $\{(t, x(t))\} \subset D$ найдется C такое, что $v(t, x(t)) = C$.*

Геометрический смысл первого интеграла описывается следующим утверждением.

Утверждение 1.2.1 *Пусть $v(t, x)$ – первый интеграл системы (1.6), $\exists i$ такое, что $\frac{\partial v}{\partial x_i} \neq 0$, c – любое из значений, принимаемых в D функцией v. Тогда равенство $v(t, x) = c$ определяет n-мерную поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$, целиком состоящую из интегральных кривых системы (1.6).*

Доказательство. Пусть P – точка на поверхности $v(t, x) = c$. Тогда $v(P) = c$. Проведем через P интегральную кривую $\{(t, x(t))\}$. По определению первого интеграла $v(t, x(t)) = v(P) = c$, т.е. вся эта кривая лежит на той же поверхности. Утверждение доказано.

Требование $v(t, x(t)) = c$ можно переписать в виде уравнения в частных производных: $\frac{dv(t,x(t))}{dt} = 0$, откуда

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = 0,$$

и, использовав уравнение (1.6), получаем

$$\frac{\partial v}{\partial t}+\sum_{j=1}^{n} f_j(t,x)\frac{\partial v}{\partial x_j}=0. \tag{1.7}$$

Заметим также, что знание первого интеграла $v(t,x)$, у которого $\frac{\partial v}{\partial x_i} \neq 0$, позволяет свести систему (1.6) к системе с меньшим числом неизвестных функций: для этого нужно разрешить равенство $v(t,x)=0$ относительно x_i и подставить полученное $x_i(t,x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ в (1.6).

1.2.2 Множество первых интегралов и его свойства.

Пусть $v_1,\ldots,v_k$ – первые интегралы системы (1.6). Возьмем произвольную функцию $\phi\colon \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $\phi \in C^1(\mathbb{R}^k)$. Нетрудно видеть, что функция $\phi(v_1(t,x),\ldots,v_k(t,x))$ также является первым интегралом системы (1.6). Таким образом, множество первых интегралов бесконечно. Опишем структуру этого множества.

Определение 1.2.3 *Первые интегралы $v_1,\ldots,v_k$ называются* **функционально независимыми** *в D, если в каждой точке D ранг матрицы $(\frac{\partial v_i}{\partial x_j})$ равен k.*

Замечание 1.2.1 *Из линейной зависимости следует функциональная, однако, обратное неверно: функции $v_1=t-x$ и $v_2=(t-x)^2$ линейно независимы, но функционально зависимы.*

Теорема 1.2.1 *В окрестности любой точки $M=(t_0,x_1^0,\ldots,x_n^0)$ области D существует n функционально независимых первых интегралов системы (1.6).*

Доказательство. Для любой точки $(t_0,c_1,\ldots,c_n)$ существует единственное решение системы (1.6), проходящее через эту точку: $x=\phi(t,c)$, причем $\phi\in C^1$ по c в силу теоремы 1.1.3. Так как $\phi_i(t_0,c)=c_i$, то при $t=t_0$ матрица $(\frac{\partial \phi_i}{\partial c_j})$ единичная. Значит, якобиан системы $x_i=\phi_i(t,c)$ при $t=t_0$ отличен от нуля. Отсюда по теореме о неявных функциях эту систему можно разрешить относительно c в некоторой окрестности M: $c=v(t,x)$. Покажем, что $v_i(t,x)$ – функционально независимые первые интегралы системы (1.6). Действительно, для каждой интегральной кривой $\{(t,x(t))\}$ во всех точках этой кривой числа $c_1,\ldots,c_n$ постоянны. Значит, v_i постоянны вдоль интегральных интегральных кривых и являются первыми интегралами. Далее, при фиксированном t близком

к t_0 системы функций $\phi(t,c)$ и $v(t,x)$ взаимно обратны. Значит, произведение их якобианов равно единице, откуда следует, что $\det(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}) \neq 0$. Значит, ранг матрицы $(\frac{\partial v_i}{\partial x_j})$ равен n, что и означает, что функции $v_i(t,x)$ функционально независимы.
Теорема доказана.

Теорема 1.2.2 *Пусть $v_1, \dots, v_n$ – независимые первые интегралы системы (1.6) в области D, точка $M = (t_0, x^0) \in D$, $c_i = v_i(M)$. Тогда решение системы (1.6) с начальными условиями $x(t_0) = x^0$ определяется как неявная функция системой уравнений*

$$v_i(t,x) = c_i. \tag{1.8}$$

Доказательство. Система (1.8) для $x_i(t_0) = x_i^0$ верна в точке M, и в этой точке $\det(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}) \neq 0$, т.к. v_i – функционально независимы. По теореме о неявных функциях систему (1.8) можно разрешить относительно x:

$$x_i = \phi_i(t,c) \tag{1.9}$$

Функции ϕ_i удовлетворяют системе (1.8). С другой стороны, решение (1.6) удовлетворяет (1.8) при $t = t_0$ в силу выбора постоянных $c_1, \dots, c_n$. Оно удовлетворяет (1.8) и при других t, так как первые интегралы постоянны вдоль решения. В силу единственности неявной функции это решение имеет координаты x_i, совпадающие с (1.9).
Теорема доказана.

Теорема 1.2.3 *Пусть $v_1, \dots, v_n$ – функционально независимые первые интегралы системы (1.6) в окрестности U точки $M^* = (t_0, x^*)$. Тогда любой первый интеграл w системы (1.6) в некоторой окрестности точки M^* является функцией от v_j, т.е. найдется $F \in C^1$ такая, что $w = F(v)$.*

Доказательство. Пусть $M = (t_0, x^0) \in U$, $c_i = v_i(M)$. Тогда, как и в предыдущей теореме, система (1.8) определяет решение (1.9) системы (1.6). Такие решения заполняют окрестность $U_1 \subseteq U$ точки M^*. Вдоль каждого из них $w = \mathrm{const}$, то есть $w(t, \phi(t,c)) = w(t_0, \phi(t_0, c))$. Обозначим $F(c) = w(t_0, \phi(t_0, c))$. Тогда $F \in C^1$. Переходя от c к x в силу (1.9), а затем от x к v в силу (1.8), получаем $w(t,x) = F(v(t,x))$.
Теорема доказана.

1.2.3 Первые интегралы автономной системы.

Система

$$\dot{x} = f(x), \tag{1.10}$$

где $f \in C^1$, удовлетворяет условиям теоремы 1.2.1 и потому в окрестности любой точки имеет n функционально независимых первых интегралов вида $v(t,x)$. Оказывается, что в силу специального вида системы имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2.4 *В окрестности любой неособой точки система (1.10) имеет $n-1$ функционально независимый первый интеграл вида $v(x)$, т.е. не зависящий от t.*

Доказательство. Пусть $B = x^0$ – неособая точка. Тогда найдется i такое, что $f_i(B) \neq 0$. Без ограничения общности можно считать $f_n(B) \neq 0$. Тогда в силу непрерывности f существует окрестность U точки B такая, что $f_n(x) \neq 0$ в U. Поделив все уравнения системы (1.10) на n-ное, в области U имеем:

$$\frac{dx_i}{dx_n} = \frac{f_i(x)}{f_n(x)}. \tag{1.11}$$

По теореме 1.2.1 эта система в некоторой окрестности точки B имеет $n-1$ функционально независимых первых интегралов $v_i(x_1,\ldots,x_n)$, $i = 1,\ldots,n-1$. Эти первые интегралы постоянны вдоль решений системы (1.11), т.е. вдоль траекторий системы (1.10). Значит, они являются первыми интегралами системы (1.10). Независимость v_i для системы (1.11) означает, что ранг матрицы $(\frac{\partial v_i}{\partial x_j})_{i,j=1,\ldots,n-1}$ равен $n-1$. Отсюда следует, что $v_i(x)$ функционально независимы и для системы (1.10).
Теорема доказана.

Упражнения. 1. Доказать, что если функции $v_1,\ldots,v_n$ линейно зависимы, то они функционально зависимы.
2. Найти не зависящий от t первый интеграл системы, эквивалентной уравнению $\ddot{x} + x = 0$. Каков его физический смысл?

Литература:
А.Ф.Филиппов, „Введение в теорию дифференциальных уравнений“, §25

Глава 2

УрЧП первого порядка и их классические решения.

2.1 Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка.

2.1.1 Линейные уравнения в частных производных первого порядка.

Определение 2.1.1 *Линейным однородным уравнением в частных производных (УрЧП) первого порядка называется*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x)\frac{\partial z}{\partial x_j} = 0, \tag{2.1}$$

где $z = z(x)$ – искомая функция, $a_j(x) \in C^1(D)$ – известные функции, для которых выполнено условие

$$\sum_{j=1}^{n} a_j^2(x) \neq 0 \ \forall x \in D. \tag{2.2}$$

Теорема 2.1.1 *Функция $z(x) \in C^1(D)$ является решением (2.1) тогда и только тогда, когда $z(x)$ – не содержащий t первый интеграл системы ОДУ*

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x). \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $z(x)$ – первый интеграл (2.3), тогда для любого решения $x(t)$ системы (2.3) найдется константа c такая, что $z(x(t)) = c$. Переписывая это равенство в виде $\frac{dz(x(t))}{dt} = 0$, получаем, что для $z(x)$ выполнено равенство

$$\frac{\partial z}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{dx_j}{dt} \frac{\partial z}{\partial x_j} = 0, \tag{2.4}$$

откуда и из того, что $\frac{\partial z}{\partial t} = 0$, $x(t)$ – решение (2.3) получаем, что для $z(x)$ имеет место (2.1).
Обратно, пусть $z(x)$ – решение (2.1), $x(t)$ – решение (2.3). Тогда в силу (2.1) для функции $z(x(t))$ выполнено (2.4). Отсюда $\frac{dz(x(t))}{dt} = 0$, т.е. найдется константа c такая, что $z(x(t)) = c$. Значит, функция $z(x)$ – не зависящий от t первый интеграл (2.3).
Теорема доказана.

Лемма 2.1.1 *Пусть $a_1(x) \neq 0$, первые интегралы $v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x)$ системы (2.3) функционально независимы в области D. Тогда система (2.3) сводится к*

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{a_i(x)}{a_1(x)},\ i = 2, \ldots, n \tag{2.5}$$

с теми же первыми интегралами.

Доказательство. В точности совпадает с частью доказательства теоремы 1.2.4.

Теорема 2.1.2 *Если $v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x)$ – независимые первые интегралы системы (2.3) в области D, то для любого решения $z(x)$ задачи (2.1) в окрестности любой точки $M \in D$ найдется функция $F \in C^1$ такая, что*

$$z(x) = F(v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x)) \tag{2.6}$$

и наоборот: для любой функции $F \in C^1$ формула (2.6) задает решение задачи (2.1).

Доказательство. Если $F \in C^1$, то функция $z(x)$, заданная формулой (2.6) – первый интеграл системы (2.3), не зависящий от t. Следовательно, по теореме 2.1.1 функция $z(x)$ – решение (2.1).
Обратно, если $z(x)$ – решение (2.1), то при $a_1(M) \neq 0$ по теореме 2.1.1 и лемме 2.1.1 функция $z(x)$ – первый интеграл системы (2.5). Значит, по теореме 1.2.3 в некоторой окрестности M найдется $F \in C^1$ такая, что имеет место равенство (2.6). Если же $a_1(M) = 0$, то в силу (2.2) найдется k такое, что $a_k(M) \neq 0$, и перенумеровав переменные, можно свести задачу к ситуации $a_1(M) \neq 0$.
Теорема доказана.

2.1.2 Квазилинейные УрЧП первого порядка.

Определение 2.1.2 *Квазилинейным называется уравнение вида*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x,z)\frac{\partial z}{\partial x_j} = b(x,z), \tag{2.7}$$

где $a_j(x,z) \in C^1(D)$, $b(x,z) \in C^1(D)$ *– известные функции, и имеет место аналог соотношения (2.2) – соотношение* $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j^2(x,z) \neq 0\ \forall (x,z) \in D$.

Определение 2.1.3 *Системой характеристик для уравнения (2.7) называется система ОДУ*

$$\frac{dx_i}{dt} = a_i(x,z),\ \ \frac{dz}{dt} = b(x,z). \tag{2.8}$$

Траектории системы (2.8) в пространстве $x_1, \ldots, x_n, z$ *называются характеристиками уравнения (2.7).*

Очевидно, что линейное однородное УрЧП первого порядка является частным случаем квазилинейного УрЧП. Таким образом, систему (2.3) можно назвать системой характеристик для линейного однородного УрЧП (2.1). Кроме того, теоремы 2.1.1 и 2.1.2 описывают связь между решением УрЧП (2.1) и соответствующей системой характеристик. Получим аналогичную связь для квазилинейного УрЧП (2.7).

Теорема 2.1.3 *Поверхность* $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ *– решение (2.7) тогда и только тогда, когда эта поверхность состоит из характеристик уравнения (2.7).*

Доказательство. Пусть характеристика $\{(x(t), z(t))\}$ лежит на поверхности $z = f(x)$. Так как характеристика – траектория (2.8), то координаты касательного вектора к ней имеют вид $(a_1(x,z), \ldots, a_n(x,z), b(x,z))$. Так как эта характеристика лежит на поверхности, то вектор нормали к поверхности $(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}, -1)$ ортогонален касательному вектору к характеристике, то есть, имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{n} a_j(x, f(x))\frac{\partial f}{\partial x_j}(x) - b(x, f(x)) = 0.$$

Если через каждую точку поверхности проходит характеристика, то это уравнение выполнено на всей поверхности, а значит, $z = f(x)$ удовлетворяет (2.7).

Обратно, пусть поверхность $P = \{(x, z) \colon z = f(x)\}$ удовлетворяет (2.7), точка $M \in P$. Покажем, что через M проходит характеристика, лежащая на P. В области G – проекции P на $x_1, \ldots, x_n$ – рассмотрим систему ОДУ

$$\dot{x}_i = a_i(x, f(x)). \tag{2.9}$$

Через точку x^0 – проекцию M на G – проходит единственное решение этой системы $x(t)$. Линия $L = \{(x(t), f(x(t)))\}$ лежит на поверхности P и проходит через M. Покажем, что L – характеристика. Первым уравнениям системы (2.8) она удовлетворяет в силу (2.9) и равенства $z = f(x)$ на P. Далее,

$$\frac{dz}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{dx_j}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_j(x, f(x)) \frac{\partial f}{\partial x_j} = b(x, f(x))$$

в силу того, что $z = f(x)$ – решение (2.7). Значит, L удовлетворяет и последнему уравнению (2.8). Следовательно, L – характеристика.
Теорема доказана.

Теорема 2.1.4 *Если $v(x, z)$ – первый интеграл (2.8) в D, в точке M выполнены равенства $v(M) = c$, $\frac{\partial v}{\partial z}(M) \neq 0$, то равенство $v(x, z) = c$ определяет в окрестности точки M неявную функцию $z = f(x)$, удовлетворяющую уравнению (2.7).*

Доказательство. Так как v – первый интеграл, то

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} a_j(x, z) \frac{\partial v}{\partial x_j} + b(x, z) \frac{\partial v}{\partial z} = 0 \tag{2.10}$$

Для неявной функции $z(x)$ в окрестности точки M имеем

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = -\frac{\frac{\partial v}{\partial x_i}}{\frac{\partial v}{\partial z}},$$

откуда, разделив (2.10) на $-\frac{\partial v}{\partial z}$, получаем, так как $\frac{\partial v}{\partial t} = 0$, что функция $z(x)$ удовлетворяет уравнению (2.7).
Теорема доказана.

Теорема 2.1.5 *Пусть $v_1(x, z), \ldots, v_n(x, z)$ – функционально независимые первые интегралы системы (2.8). Функция $z(x)$ – решение уравнения (2.7) в окрестности точки M своего графика тогда и только тогда, когда она удовлетворяет равенству*

$$F(v_1(x, z), \ldots, v_n(x, z)) = 0 \tag{2.11}$$

для некоторой функции $F \in C^1$ такой, что $F(M) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z}(M) \neq 0$.

Доказательство. Функция $F(v_1, \ldots, v_n)$ является первым интегралом системы (2.8). При $\frac{\partial F}{\partial z}(M) \neq 0$ равенство (2.11) определяет вблизи точки M неявную функцию $z(x)$, удовлетворяющую (2.7) по теореме 2.1.4. Покажем, что для любой функции $z(x)$ – решения (2.7) – найдется $F \in C^1$ такая, что выполнено (2.11). Без ограничения общности можно считать, что $a_1(M) \neq 0$, тогда вблизи точки M характеристики уравнения (2.7) удовлетворяют системе

$$\frac{dx_i}{dx_1} = \frac{a_i(x,z)}{a_1(x,z)}, \; \frac{dz}{dx_1} = \frac{b(x,z)}{a_1(x,z)}. \tag{2.12}$$

Пусть $z = f(x) \in C^1$ – решение (2.7), проходящее через точку $M = (x^0, z_0)$. Тогда решение (2.12) с начальными условиями $x_i(x_1^0) = c_i$, $z(x_1^0) = f(x_1^0, c) + q$ обозначим

$$x_i = \phi_i(x_1, c, q), \; z = \phi_{n+1}(x_1, c, q). \tag{2.13}$$

При $x_1 = x_1^0$, $c_i = x_i^0$, $q = 0$ получаем точку M. В этой точке якобиан

$$\det\left(\frac{\partial \phi_i}{\partial(c,q)}\right) = 1$$

в силу начальных условий. Значит, по теореме о неявной функции систему (2.13) можно разрешить относительно c, q: $c_i = w_i(x,z)$, $q = w_{n+1}(x,z)$. Аналогично доказательству теоремы 1.2.1 можно доказать, что $w_i(x,z)$ – первые интегралы системы (2.12). При этом поверхность $z = f(x)$ совпадает с поверхностью $w_{n+1}(x,z) = 0$, так как обе они состоят из характеристик – решений системы (2.12) с начальными условиями c; $q = 0$. По теореме 1.2.3 найдется функция $F \in C^1$ такая, что $w_{n+1} = F(v_1, \ldots, v_n)$, где v_i – функционально независимые первые интегралы системы (2.12) (они совпадают с первыми интегралами системы (2.8) согласно лемме 2.1.1). Покажем, что $\left.\frac{\partial w_{n+1}}{\partial z}\right|_{(x,z)=M} \neq 0$. В этой точке, в силу начальных условий, имеем $w_{n+1}(x^0, z) = q = z - f(x^0)$, откуда $\left.\frac{\partial w_{n+1}}{\partial z}\right|_{(x,z)=M} = 1 \neq 0$.
Теорема доказана.

Замечание 2.1.1 *Если z входит только в один из первых интегралов системы (2.8), то вместо (2.11) для нахождения $z(x)$ можно использовать уравнение*

$$v_n(x,z) = H(v_1(x), \ldots, v_{n-1}(x)),$$

где $h \in C^1$ – произвольная функция.

Упражнения. 1. Провести подробное доказательство леммы 2.1.1.
2. Доказать, что функции $w_i(x,z)$ из доказательства теоремы 2.1.5 – первые интегралы системы (2.12).

Литература:
А.Ф.Филиппов, „Введение в теорию дифференциальных уравнений", §26
Доброхотов, §1

2.2 Задача Коши для квазилинейных УрЧП.

2.2.1 Теорема существования и единственности решения.

Для простоты формулировок будем рассматривать случай двух независимых переменных.

Определение 2.2.1 *Задачей Коши называется задача о нахождении поверхности $z = f(x, y)$, удовлетворяющей уравнению*

$$a_1(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x} + a_2(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y} = b(x, y, z) \tag{2.14}$$

и проходящей через линию L, заданную параметрически:

$$x = \phi_1(s),\ y = \phi_2(s),\ z = \phi_3(s). \tag{2.15}$$

При этом предполагается, что $a_j \in C^1$, $b \in C^1$, $\phi_j \in C^1$, для функций a_j выполнено условие (2.2).

Идея построения решения задачи Коши (2.14)-(2.15) заключается в том, чтобы провести характеристику через каждую из точек кривой L. Если из этих характеристик удастся составить поверхность $z = f(x, y) \in C^1$, то согласно теореме 2.1.3 эта поверхность – искомая.

Теорема 2.2.1 *Пусть на дуге L_1 линии L, заданной двойным неравенством $s_1 \leq s \leq s_2$, выполнено условие нехарактеристичности*

$$\det\begin{pmatrix} a_1(\phi_1(s), \phi_2(s), \phi_3(s)) & \phi_1'(s) \\ a_2(\phi_1(s), \phi_2(s), \phi_3(s)) & \phi_2'(s) \end{pmatrix} \neq 0. \tag{2.16}$$

Тогда в некоторой окрестности любой точки дуги L_1 существует единственное решение задачи Коши (2.14)-(2.15).

Доказательство. Так как $a_i \in C^1$, $b \in C^1$, $a_1^2 + a_2^2 \neq 0$, то через любую точку $(\phi_1(s), \phi_2(s), \phi_3(s))$ дуги L_1 проходит единственная характеристика, задаваемая уравнениями

$$x = \psi_1(t, s),\ y = \psi_2(t, s),\ z = \psi_3(t, s). \tag{2.17}$$

Функции (2.17) удовлетворяют системе (2.8) с начальными условиями $\psi_j(0,s) = \phi_j(s)$. Тем самым, формулы (2.17) задают искомую поверхность $z = f(x,y)$ параметрически. Далее, функции $\psi_j \in C^1$ по теореме о дифференцируемости решения по параметру (теорема 1.1.3). Кроме того, уравнения (2.17) имеют место в каждой из точек дуги L_1, причем $\frac{\partial x}{\partial t} = a_1$, $\frac{\partial y}{\partial t} = a_2$, и из начальных условий $\frac{\partial \psi_j}{\partial s} = \phi_j'(s)$. Поэтому якобиан

$$\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial t} & \frac{\partial \psi_1}{\partial s} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial t} & \frac{\partial \psi_2}{\partial s} \end{pmatrix} \Bigg|_{L_1} = \det \begin{pmatrix} a_1 & \phi_1' \\ a_2 & \phi_2' \end{pmatrix} \Bigg|_{L_1} \neq 0$$

в силу (2.16). Значит, в окрестности любой точки дуги L_1 первые два уравнения системы (2.17) можно разрешить относительно t, s и получить $t = t(x,y),\ s = s(x,y) \in C^1$. Подставляя эти выражения в третье уравнение (2.17), получаем $z = \psi_3(t(x,y), s(x,y)) \in C^1$. Существование доказано.
Единственность следует из того, что по теореме 2.1.3 любое решение – поверхность, составленная из характеристик, т.е. в параметрическом виде удовлетворяет системе (2.17); вблизи дуги L_1 функции $t(x,y)$ и $s(x,y)$ определяются из этой системы единственным образом, а значит, $z(x,y)$ – тоже.
Теорема доказана.

2.2.2 Алгоритмы интегрирования задачи Коши для линейного и квазилинейного УрЧП.

Важным является тот факт, что доказательство теоремы 2.2.1 является конструктивным, т.е. позволяет построить решение задачи Коши (2.14)-(2.15). Тем самым, мы получили следующий алгоритм.

Алгоритм интегрирования задачи Коши для квазилинейного УрЧП с двумя переменными (A1):
1. Выписать систему характеристик и начальные данные для нее:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{x} = a_1(x,y,u), & x|_{t=0} = \phi_1(s), \\ \dot{y} = a_2(x,y,u), & y|_{t=0} = \phi_2(s), \quad s \in [s_1, s_2] \\ \dot{u} = b(x,y,u), & u|_{t=0} = \phi_3(s), \end{array} \right. \tag{2.18}$$

При этом параметры s_1 и s_2 пока произвольны.
2. Решить систему (2.18), т.е. найти

$$x = \psi_1(t,s),\ y = \psi_2(t,s),\ u = \psi_3(t,s).$$

3. Проверить условие разрешимости (2.16), получив тем самым область разрешимости $[s_1, s_2]$.

4. Выразить (t, s) через (x, y):

$$t = T(x, y), \ s = S(x, y).$$

5. Подставить $u(x, y) = \psi_3(T(x, y), S(x, y))$.

Рассмотрим теперь линейное УрЧП с двумя переменными:

$$a_1(x, y)u_x + a_2(x, y)u_y + b(x, y)u = f(x, y). \tag{2.19}$$

Это уравнение является частным случаем квазилинейного УрЧП (2.14), и, модифицируя алгоритм A1 для того, чтобы решить задачу Коши (2.19),(2.15), получаем следующий алгоритм.

Алгоритм интегрирования задачи Коши для линейного УрЧП с двумя переменными (A2):

1. Выписать систему характеристик и начальные данные для нее:

$$\begin{cases} \dot{x} = a_1(x, y), & x|_{t=0} = \phi_1(s), \\ \dot{y} = a_2(x, y), & y|_{t=0} = \phi_2(s), \end{cases} \quad s \in [s_1, s_2]$$

Эта система является автономной системой первого порядка из двух уравнений, она допускает понижение порядка (переход к $y(x)$). Найти решение этой системы $x = \psi_1(t, s), \ y = \psi_2(t, s)$. При этом параметры s_1 и s_2 пока не определены.

2. Записать уравнение характеристик для u:

$$\dot{u} = f(\psi_1(t, s), \psi_2(t, s)) - b(\psi_1(t, s), \psi_2(t, s))u, \ u|_{t=0} = \phi_3(s),$$

и решить его, получив $u = \psi_3(t, s)$.

3. Проверить условие разрешимости (2.16), получив тем самым область разрешимости $[s_1, s_2]$.

4. Выразить (t, s) через (x, y):

$$t = T(x, y), \ s = S(x, y).$$

5. Подставить $u(x, y) = \psi_3(T(x, y), S(x, y))$.

2.2.3 Обобщение алгоритма A2 на случай произвольной размерности. Интегрирование уравнений неразрывности и переноса.

Теорема 2.2.2 *Пусть γ – гладкая гиперповерхность в $\mathbb{R}^n$, $u_0(x)$ – гладкая функция на γ, $a_j(x), b(x), f(x) \in C^1(D)$, $\gamma \in D \subseteq \mathbb{R}^n$, векторное поле $a(x) \neq 0$ во всех точках $x \in D$. Пусть также γ задана параметрически в виде $\gamma = \{X^0(\xi), \xi \in \mathbb{R}^{n-1}\}$, и выполнено условие нехарактеристичности*

$$\det \left(\frac{\partial X^0}{\partial \xi^j}; a(X^0(\xi)) \right) \neq 0.$$

Тогда решение задачи

$$< a(x), \nabla_x u > + b(x)u = f(x), \ u|_\gamma = u_0(x)$$

существует, единственно в некоторой окрестности гиперповерхности γ и находится по алгоритму А2, в котором первый шаг надо заменить на:
1. *Выписать $\dot{x} = a(x)$, $x(0) = X^0(\xi)$ и решить эту систему, получив $X = \psi(t, \xi)$.*

Доказательство. Аналогично доказательству теоремы 2.2.1.

Применим обобщенный алгоритм А2 к задаче Коши для уравнения неразрывности. **Уравнение неразрывности** – уравнение на плотность $\varrho(x,t)$ идеальной сжимаемой жидкости, текущей с заданным полем скоростей $v(x,t) \in C^1(\mathbb{R}^4)$. Оно имеет вид

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + div_x(\varrho v) = 0. \tag{2.20}$$

Зададим также начальное распределение плотности

$$\varrho|_{t=0} = \varrho_0(x) \in C^1 \tag{2.21}$$

Проинтегрируем задачу Коши (2.20)-(2.21). Преобразуя (2.20), имеем

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \sum_{j=1}^{3} v_j \frac{\partial \varrho}{x_j} + \varrho div_x v = 0.$$

Значит, задачу Коши (2.20)-(2.21) можно интегрировать по обобщенному алгоритму А2. Для этого заметим сначала, что гиперповерхность γ может быть параметризована естественным образом: $\gamma = \{(\xi, 0), \xi \in \mathbb{R}^3\}$. Применяя обобщенный алгоритм А2, получим:

$$\begin{cases} \dot{x}_j = v_j(x, \tau), & x|_{\tau=0} = \xi_j, \\ \dot{t} = 1, & t|_{\tau=0} = 0, \end{cases} \tag{2.22}$$

откуда $t = \tau$. Пусть $x = \psi(\xi, t)$ – решение этой системы, тогда для $\varrho(\xi, \tau)$ уравнение характеристики имеет вид

$$\dot{\varrho}(\psi(\xi,\tau),\tau) + \varrho(\psi(\xi,\tau),\tau)(div_x v)|_{x=\psi(\xi,\tau),t=\tau} = 0, \ \varrho|_{\tau=0} = \varrho_0(\xi),$$

и его решение

$$\varrho(\psi(\xi,\tau),\tau) = \varrho_0(\xi) \exp(-\int_0^\tau (div_x v)|_{x=\psi(\xi,\tau'),t=\tau'} d\tau') \tag{2.23}$$

Далее, разрешая $x = \psi(\xi, \tau)$ относительно ξ, с учетом того, что $t = \tau$, имеем $\xi = S(x, \tau)$. Подставив это в (2.23), имеем

$$\varrho(x,t) = \left(\varrho_0(\xi) \exp(-\int\limits_0^\tau (div_x v)|_{x=\psi(\xi,\tau'),t=\tau'} d\tau') \right)\Bigg|_{\xi=S(x,t)} \tag{2.24}$$

Попробуем упростить эту формулу. Для этого докажем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2.2.1 (Формула Лиувилля) *Якобиан* $J_x(\xi, t) = \det(\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_j})$ *удовлетворяет уравнению*

$$\frac{dJ_x}{dt} = J_x \cdot (div_x v)|_{x=\psi(\xi,\tau)}$$

Доказательство. Система (2.22) удовлетворяет всем условиям теоремы 1.1.3, отсюда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_j}\right) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial \psi_k}{\partial \xi_j},$$

и, обозначив $Y = \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial \xi_j}\right)$, имеем

$$\dot{Y} = \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}\right)_{i,k=1,\ldots,3} Y.$$

Далее, $Y(0) = E$, значит, матрица Y – невырожденная при малых t, т.е. $J_x \neq 0$ и по правилу дифференцирования невырожденной матрицы получаем

$$\frac{dJ_x}{dt} = \det Y \cdot tr(\dot{Y} Y^{-1}),$$

откуда следует утверждение леммы.

Теорема 2.2.3 *Пусть при* $t \in [0, T]$, $\xi \in \mathbb{R}^3$ *верно* $J_x \neq 0$. *Тогда формулу (2.24) можно переписать в виде*

$$\varrho(x,t) = \left(\frac{\varrho_0(\xi)}{J_x(\xi,t)}\right)\Bigg|_{\xi=S(x,t)}.$$

Доказательство. В силу леммы Лиувилля имеем

$$(div_x v)|_{x=\psi(\xi,t)} = \frac{\dot{J}_x}{J_x},$$

откуда экспонента в формуле (2.24) имеет вид

$$\exp\left(-\int_0^t \frac{\dot J_x}{J_x} d\tau\right) = \exp(-\ln J_x(\xi,t) + \ln J_x(\xi,0)) = \frac{1}{J_x(\xi,t)},$$

так как $J_x(\xi,0)=1$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Уравнение переноса имеет вид

$$\sum_{j=1}^{3} v_j(x,t)\frac{\partial \phi}{\partial x_j} + \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(x,t)\phi = 0, \tag{2.25}$$

где $v(x,t)$ – потенциальное поле с потенциалом $S(x,t)$: $v(x,t) = \nabla S(x,t)$, а функция $f(x,t) = \frac{1}{2}\Delta S(x,t)$. Зададим начальные условия

$$\phi|_{t=0} = \phi_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3) \tag{2.26}$$

Пусть $X(x^0,t)$ – решение системы характеристик

$$\dot x = v(x,t),\ x|_{t=0} = x^0,$$

и якобиан $J_x = \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j^0}\right) \neq 0$ при $t\in[0,T]$, $x^0(x,t)$ – решение системы $x = X(x^0,t)$.

Теорема 2.2.4 *Решение задачи Коши (2.25)-(2.26) на отрезке* $[0,T]$ *задается формулой*

$$\phi(x,t) = \left.\frac{\phi_0(x^0)}{\sqrt{J_x(x^0,t)}}\right|_{x^0=x^0(x,t)}.$$

Доказательство. Пусть $\varrho(x,t) = \phi^2(x,t)$, тогда $\varrho(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + <\nabla_x\varrho, v(x,t)> + \varrho\Delta S = 0.$$

Так как $v(x,t) = \nabla_x S(x,t)$, то это уравнение имеет вид

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + div_x(\varrho\cdot grad_x S) = 0.$$

Последнее уравнение – уравнение неразрывности. Отсюда и из теоремы 2.2.3 следует доказываемое.

Упражнения. 1. Провести подробное доказательство теоремы 2.2.2.
2. Провести подробное доказательство теоремы 2.2.4.

Литература:

А.Ф.Филиппов, „Введение в теорию дифференциальных уравнений“, §26
Доброхотов, §1

2.3 Введение в теорию нелинейных УрЧП первого порядка. Огибающие и характеристики.

2.3.1 Полные интегралы и огибающие.

Пусть $F(p, z, x) \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$. Рассмотрим нелинейное УрЧП первого порядка

$$F(\nabla_x u, u, x) = 0. \tag{2.27}$$

Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, и $\forall a \in A$ существует функция $u(x, a)$ – решение (2.27) такое, что $u(x, a) \in C^2$. Обозначим $(D_a u, D^2_{xa} u)$ матрицу

$$(D_a u, D^2_{xa} u) = \begin{pmatrix} u_{a_1} & u_{x_1 a_1} & \dots & u_{x_n a_1} \\ u_{a_2} & u_{x_1 a_2} & \dots & u_{x_n a_2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ u_{a_n} & u_{x_1 a_n} & \dots & u_{x_n a_n} \end{pmatrix}.$$

Определение 2.3.1 *Функция $u(x, a)$ называется* **полным интегралом** *уравнения (2.27) в $U \times A$, если*
1) $u(x, a)$ – решение (2.27) для всех $a \in A$.
2) $\mathrm{rank}(D_a u, D^2_{xa} u) = n$ для всех $x \in U$, $a \in A$.

Замечание 2.3.1 *Условие 2) в определении означает, что $u(x, a)$ зависит от всех параметров $a_1, \dots, a_n$, т.е. не существует множества $B \subset \mathbb{R}^{n-1}$ такого, что каждому $a \in A$ соответствует $b \in B$ по закону $u(x, a) = \phi(x, b)$ $\forall x \in U$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда существует отображение $\psi \colon A \to B$, заданное соотношением $u(x, a) = \phi(x, \psi(a))$. Будем считать, что $\psi \in C^1$. Тогда $u_{x_i a_j} = \sum\limits_{k=1}^{n-1} \phi_{x_i b_k}(x, \psi(a)) \psi^k_{a_j}(a)$. Отсюда видно, что

$$\det(D^2_{xa} u) = \sum_{k1, k_2, \dots, k_n = 1}^{n-1} \phi_{x_1 b_{k_1}} \phi_{x_2 b_{k_2}} \dots \phi_{x_n b_{k_n}} \det \Psi = 0,$$

где матрица Ψ имеет вид

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^{k_1}_{a_1} & \dots & \psi^{k_1}_{a_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \psi^{k_n}_{a_1} & \dots & \psi^{k_n}_{a_n} \end{pmatrix},$$

так как при любом выборе k_j в матрице Ψ есть минимум два одинаковых столбца. Аналогично доказывается, что для всех подматриц матрицы $(D_a u, D^2_{xa} u)$ размера $n \times n$ их определители равны нулю, откуда следует, что $\mathrm{rank}(D_a u, D^2_{xa} u) < n$.

Определение 2.3.2 *Пусть* $u = u(x,a) \in C^1$, $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, $a \in A \subset \mathbb{R}^m$. *Рассмотрим систему алгебраических уравнений на* a*:*

$$\frac{\partial u(x,a)}{\partial a_i} = 0. \tag{2.28}$$

Пусть функция $a = \phi(x) \in C^1$ *– решение (2.28). Тогда функция* $v(x) = u(x, \phi(x))$ *называется* **огибающей** *семейства функций* $\{u(x,a),\ a \in A\}$.

Теорема 2.3.1 *Пусть для всех* $a \in A$ *функция* $u(x,a)$ *– решение (2.27), существует* $v(x)$ *– огибающая,* $v(x) \in C^1$. *Тогда* $v(x)$ *– решение (2.27) и называется* **особым интегралом** *(2.27).*

Доказательство. Положим $v(x) = u(x, \phi(x))$, где $\phi(x)$ – решение системы алгебраических уравнений (2.28). Тогда в силу (2.28) имеем

$$v_{x_i} = u_{x_i}(x, \phi(x)) + \sum_{j=1}^{m} u_{a_j}(x, \phi(x)) \frac{\partial \phi^j}{\partial x_i} = u_{x_i}(x, \phi(x)).$$

Отсюда для любого $x \in U$ получаем

$$F(\nabla_x v(x), v(x), x) = F(\nabla_x u(x, \phi(x)), u(x, \phi(x)), x) = 0,$$

так как $u(x,a)$ – решение (2.27) для всех $a \in A$.
Теорема доказана.

Увеличим число решений, которые можно получить из полного интеграла, следующим образом: пусть $A' \subset \mathbb{R}^{n-1}$, $h \in C^1$, $h \colon A' \to \mathbb{R}$, график h лежит в A.

Определение 2.3.3 **Общим интегралом** *(зависящим от* h*) уравнения (2.27) называется огибающая* $v(x)$ *семейства функций* $u'(x,a') = u(x, a', h(a'))$ *при условии, что она существует и принадлежит классу* C^1.

Замечание 2.3.2 *Исходя из полного интеграла, можно построить решение, зависящее от произвольной функции* $h \in C^1(\mathbb{R}^{n-1})$.

Замечание 2.3.3 *Общий интеграл для (2.27) дает не все решения (2.27), если* F *– не линейная функция.*

Доказательство. Рассмотрим $F(p,z,x) = F_1(p,z,x) \cdot F_2(p,z,x)$. Если $u_1(x,a)$ – полный интеграл уравнения $F_1(\nabla_x u, u, x) = 0$, то соответствующий ему общий интеграл является общим интегралом и для F; однако, при этом „потеряны“ все решения уравнения $F_2(\nabla_x u, u, x) = 0$.

2.3.2 Примеры и упражнения.

Уравнение Клеро. Рассмотрим уравнение

$$< x, \nabla u > + f(\nabla u) = u,$$

где f – заданная функция. Полный интеграл для этого уравнения имеет вид $u(x,a) =< x, a > + f(a)$. Действительно, $\nabla_x u(x,a) = a$, откуда следует, что $u(x,a)$ – решение $\forall a \in \mathbb{R}^n$; $D_a u(x,a) = x + \nabla f(a)$, $D^2_{xa} u = E$, а значит, $\text{rank}(D_a u, D^2_{xa} u) = n$. Пусть $f(a) =< a, a >$. Построим соответствующий указанному полному интегралу особый интеграл. Система (2.28) в этом случае имеет вид $x_i + 2a_i = 0$, откуда $a = -\frac{x}{2}$, и функция $v(x) = -\frac{|x|^2}{4}$ – особый интеграл.

Уравнение эйконала. Рассмотрим уравнение

$$|\nabla u| = 1.$$

Соответствующий полный интеграл имеет вид $u(x,a,b) =< a, x > +b$, $a \in \partial B(0,1)$, $b \in \mathbb{R}$. (Здесь $B(0,1) = \{a \in \mathbb{R}^n,\ |a| \leq 1\}$ – шар радиуса 1 с центром в нуле). Пусть $n = 2$. Построим соответствующий указанному полному интегралу особый интеграл. Так как $a \in \partial B(0,1)$, то $a = (\cos\alpha, \sin\alpha)$, $u(x,a,b) = x_1 \cos\alpha + x_2 \sin\alpha + b$. Положим для простоты $b = h(a) = 0$. Тогда система (2.28) имеет вид

$$-x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha = 0,$$

откуда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{x_2}{x_1}$, а значит, функция $v(x) = x_1 \cos(\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}) + x_2 \sin(\operatorname{arctg}\frac{x_2}{x_1}) = \pm|x|$ – решение уравнения эйконала при $x \neq 0$.

Уравнение Гамильтона-Якоби. Рассмотрим уравнение

$$u_t + H(\nabla u) = 0.$$

Полный интеграл для этого уравнения имеет вид

$$u(t,x,a,b) =< a, x > +b - tH(a),\ x \in \mathbb{R}^n,\ t \geq 0.$$

Пусть для простоты $H(p) = |p|^2$, $h = 0$, тогда $u'(t,x,a) =< a, x > -t|a|^2$, огибающая находится из системы (2.28): $x - 2at = 0$, откуда $a = \frac{x}{2t}$, и огибающая имеет вид $v(x,t) = \frac{|x|^2}{4}$.

Упражнения. 1. Показать, что $u(x,a,b) =< a, x > +b$, $a \in \partial B(0,1)$, $b \in \mathbb{R}$ – полный интеграл для уравнения эйконала.
2. Показать, что $u(t,x,a,b) =< a, x > +b - tH(a)$, $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$ – полный интеграл для уравнения Гамильтона-Якоби.

2.3.3 Вывод характеристических уравнений. Задача Коши.

Попытаемся, как и в квазилинейном случае, свести задачу (2.27) к системе ОДУ. Для этого рассмотрим задачу Коши, соответствующую (2.27):

$$\begin{cases} F(\nabla u, u, x) = 0, x \in U, \\ u|_{\Gamma} = g(x), \end{cases} \tag{2.29}$$

где $\Gamma \subseteq \partial U$, $g\colon \Gamma \to \mathbb{R}$ – гладкая функция, $F \in C^1$. План решения задачи (2.29) следующий: зафиксируем $x \in U$ и попробуем найти кривую, лежащую в U и соединяющую точку x с точкой $x^0 \in \Gamma$, вдоль которой можно было бы вычислить значения функции $u(x)$. Эта кривая и будет характеристикой уравнения (2.27). Кривую будем искать в виде $x(s) = (x^1(s), \ldots, x^n(s))$, $s \in I \subseteq \mathbb{R}$. Пусть $u(x) \in C^2(U)$ – решение (2.27). Положим $z(s) = u(x(s))$, $p(s) = \nabla_x u(x(s))$. Продифференцировав по s равенства $p_i(s) = u_{x_i}(x(s))$, имеем

$$\dot{p}_i(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} u(x(s)) \cdot \dot{x}_j(s). \tag{2.30}$$

С другой стороны, продифференцировав (2.27) по x_i, получим

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j}(\nabla u, u, x) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial z}(\nabla u, u, x) \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial x_i}(\nabla u, u, x) = 0. \tag{2.31}$$

Пусть также

$$\dot{x}_j(s) = \frac{\partial F}{\partial p_j}(p(s), z(s), x(s)). \tag{2.32}$$

Воспользуемся этим и равенством (2.31) для того, чтобы избавиться от вторых производных функции $u(x)$ в (2.30). Получим на кривой $x(s)$:

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j}(p(s), z(s), x(s)) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial F}{\partial z}(p(s), z(s), x(s)) p_i(s) + \frac{\partial F}{\partial x_i}(p(s), z(s), x(s)) = 0,$$

откуда

$$\dot{p}_i(s) = -\left(\frac{\partial F}{\partial z}(p(s), z(s), x(s)) p_i(s) + \frac{\partial F}{\partial x_i}(p(s), z(s), x(s)) \right). \tag{2.33}$$

Далее, продифференцировав по s равенство $z(s) = u(x(s))$, имеем

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x(s)) \dot{x}_j(s),$$

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^{n} p_j(s) \cdot \frac{\partial F}{\partial p_j}(p(s), z(s), x(s)). \tag{2.34}$$

Переписывая (2.32)-(2.34) в векторной форме, получаем

$$\begin{cases} \dot{p}(s) = -\nabla_x F(p,z,x) - \partial_z F(p,z,x) p(s) \\ \dot{z}(s) = < \nabla_p F(p,z,x), p > \\ \dot{x}(s) = \nabla_p F(p,z,x) \end{cases}. \tag{2.35}$$

Эта система называется системой характеристических уравнений для уравнения (2.27), а кривая $(x(s), z(s), p(s))$ – характеристикой. Таким образом, доказана следующая теорема

Теорема 2.3.2 *Пусть функция $u(x) \in C^2(U)$ – решение уравнения (2.27) в области U, $x(s)$ – решение уравнения $\dot{x}(s) = \nabla_p F(p,z,x)$, где $z(s) = u(x(s))$, $p(s) = \nabla_x u(x(s))$. Тогда $p(s)$ и $z(s)$ – решения соответствующих уравнений системы (2.35) для s таких, что $x(s) \in U$.*

2.3.4 Вспомогательные утверждения.

Для простоты будем считать, что $\Gamma \subseteq \{x_n = 0\}$. Выясним, какой вид должны иметь начальные данные $p(0) = p^0$, $z(0) = z^0$, $x(0) = x^0$ для системы (2.35). Очевидно, что $x^0 \in \Gamma$, $z^0 = g(x^0)$. Для p^0 в силу (2.29) имеем $p_i^0 = g_{x_i}(x^0)$, $i = 1, \ldots, n-1$; $F(p^0, z^0, x^0) = 0$.

Определение 2.3.4 *Набор (p^0, z^0, x^0) – допустимый, если выполнены условия согласования*

$$z^0 = g(x^0),\ p_i^0 = g_{x_i}(x^0),\ i = 1, \ldots, n-1,\ F(p^0, z^0, x^0) = 0. \tag{2.36}$$

Попытаемся найти функцию $q(y)$ такую, что для всех точек $y \in \Gamma$, близких к x^0, тройка $(q(y), g(y), y)$ допустима.

Лемма 2.3.1 (Нехарактеристические граничные условия.) *Пусть тройка (p^0, z^0, x^0) допустима и выполнено условие нехарактеристичности*

$$\frac{\partial F}{\partial p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0. \tag{2.37}$$

Тогда существует единственное решение $q(y)$ задачи $q_i(y) = g_{x_i}(y)$, $F(q(y), g(y), y) = 0$ для всех $y \in \Gamma$, достаточно близких к x^0.

Доказательство. Применим теорему о неявной функции к системе уравнений

$$p_i - g_{x_i}(y) = 0,\ i = 1, \dots, n-1;\ F(p, g(y), y) = 0.$$

Эта система выполнена при $p_i = p_i^0$, $y = x^0$. Кроме того, ее якобиан по p равен

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ F_{p_1}(p^0, z^0, x^0) & F_{p_2}(p^0, z^0, x^0) & \dots & F_{p_{n-1}}(p^0, z^0, x^0) & F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \end{pmatrix} =$$

$$= F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0.$$

Значит, эта система однозначно разрешима относительно $p = q(y)$ в некоторой окрестности точки x^0.
Лемма доказана.

Замечание 2.3.4 *Если Γ не плоская вблизи x^0, то условие (2.37) принимает вид*

$$< \nabla_p F(p^0, z^0, x^0), \nu(x^0) > \neq 0,$$

где $\nu(x^0)$ – внешняя единичная нормаль к Γ в точке x^0.

Обозначим $x(y, s)$ решение последнего из уравнений системы (2.35) с начальными условиями $x|_{s=0} = y$, $z|_{s=0} = g(y)$, $p|_{s=0} = q(y)$.

Лемма 2.3.2 (Локальная обратимость.) *Пусть выполнены все условия леммы 2.3.1. Тогда найдутся такие содержащий ноль промежуток $I \subset \mathbb{R}$, окрестность W точки x^0 в Γ и окрестность V точки x^0 в $\mathbb{R}^n$, что $\forall x \in V$ существуют единственные $s \in I$, $y \in W$ такие, что $x = x(y, s)$.*

Доказательство. Имеем $x(x^0, 0) = x^0$. По теореме о неявной функции достаточно проверить, что $\det(D_{y,s}x)|_{y=x^0, s=0} \neq 0$. Из равенства $x(y, 0) = y$, т.к. $y \in \Gamma$, имеем при $i \leq n-1$

$$\frac{\partial x_j}{\partial y_i}(x^0, 0) = \delta_{ij}.$$

Кроме того, из (2.35) следует, что $\partial_s x_j(x^0, 0) = F_{p_j}(p^0, z^0, x^0)$. Отсюда

$$\det(D_{y,s}x)|_{y=x^0, s=0} = F_{p_n}(p^0, z^0, x^0) \neq 0$$

в силу условия (2.37).
Лемма доказана.

2.3.5 Локальная теорема существования.

Теорема 2.3.3 *Пусть тройка* (p^0, z^0, x^0) *допустима и выполнено условие нехарактеристичности (2.37). Положим* $x(y,s)$, $z(y,s)$, $p(y,s)$ *– решение задачи (2.35) с начальными условиями* $x|_{s=0} = y$, $z|_{s=0} = g(y)$, $p|_{s=0} = q(y)$. *В силу леммы о локальной обратимости положим* $\forall x \in V$: $s = s(x)$, $y = y(x)$, $u(x) = z(y(x), s(x))$, $p(x) = p(y(x), s(x))$. *Тогда* $u(x) \in C^2$ *и является решением задачи Коши (2.29).*

Доказательство. 1. Решение системы (2.35) с указанными в условии начальными данными локально существует и единственно. В силу леммы 2.3.1 это решение – гладкая функция от y, s; в силу леммы 2.3.2 функции $s(x)$ и $y(x)$ – гладкие. Значит, $p(x) \in C^1$.
2. Покажем, что $f(y,s) = F(p(y,s), z(y,s), x(y,s)) = 0$. Действительно, $f(y,0) = F(q(y), g(y), y) = 0$ в силу условий согласования (2.36) и леммы 2.3.1. Далее,

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j}\dot{p}_j + \frac{\partial F}{\partial z}\dot{z} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}\dot{x}_j =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j}\left(-\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial z}p_j\right) + \frac{\partial F}{\partial z}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j}p_j\right) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j}\frac{\partial F}{\partial p_j} = 0$$

в силу (2.35). Отсюда и из $f(y,0) = 0$ следует $f(y,s) = 0 \ \forall s \in I$.
3. В силу леммы 2.3.2 и равенства $f(y,s) = 0$ имеем $F(p(x), u(x), x) = 0$. Осталось показать, что $p(x) = \nabla_x u(x)$.
4. Покажем сначала, что для любых $s \in I$, $y \in W$:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \sum_{j=1}^{n} p_j(y,s)\frac{\partial x_j}{\partial s}, \tag{2.38}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y_i} = \sum_{j=1}^{n} p_j(y,s)\frac{\partial x_j}{\partial y_i}. \tag{2.39}$$

Равенство (2.38) следует напрямую из второго и третьего уравнений системы (2.35). Для доказательства равенства (2.39) положим

$$r_i(s) = \frac{\partial z}{\partial y_i} - \sum_{j=1}^{n} p_j(y,s)\frac{\partial x_j}{\partial y_i}, \ i = 1, \ldots, n-1.$$

Заметим, что $r_i(0) = g_{x_i}(y) - q_i(y) = 0$ в силу условий согласования. Кроме того,

$$\dot{r}_i(s) = \frac{\partial^2 z}{\partial y_i \partial s} - \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial p_j}{\partial s}\frac{\partial x_j}{\partial y_i} + p_j\frac{\partial^2 x_j}{\partial y_i \partial s}\right).$$

Продифференцировав (2.38) по y_i, имеем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y_i \partial s} = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial p_j}{\partial y_i} \frac{\partial x_j}{\partial s} + p_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial y_i \partial s} \right).$$

Из двух последних равенств следует, что

$$\dot{r}_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial p_j}{\partial y_i} \frac{\partial x_j}{\partial s} - \frac{\partial p_j}{\partial s} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{\partial p_j}{\partial y_i} \frac{\partial F}{\partial p_j} - \left(-\frac{\partial F}{\partial x_j} - \frac{\partial F}{\partial z} p_j \right) \frac{\partial x_j}{\partial y_i} \right).$$

Далее, продифференцировав равенство $F(p, z, x) = 0$ по y_i, имеем

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial p_j} \frac{\partial p_j}{\partial y_i} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y_i} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial y_i} = 0.$$

Отсюда

$$\dot{r}_i = \frac{\partial F}{\partial z} \left(\sum_{j=1}^{n} p_j \frac{\partial x_j}{\partial y_i} - \frac{\partial z}{\partial y_i} \right) = -\frac{\partial F}{\partial z} r_i(s).$$

Поэтому $r_i(s)$ – решение линейного однородного ОДУ с начальным условием $r_i(0) = 0$. Значит, $r_i(s) = 0$ и равенство (2.39) доказано.

5. Для $j = 1, \ldots, n$ с помощью (2.38) и (2.39) имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x_j} = \frac{\partial z}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\partial z}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} = \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial x_k}{\partial s} \right) \frac{\partial s}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \right) \frac{\partial y_i}{\partial x_j} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} p_k \left(\frac{\partial x_k}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x_j} + \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial x_k}{\partial y_i} \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right) = \sum_{k=1}^{n} p_k \frac{\partial x_k}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} p_k \delta_{jk} = p_j,$$

откуда $p(x) = \nabla_x u(x)$.

Теорема доказана.

2.3.6 Характеристики для законов сохранения. Пересекающиеся характеристики.

Рассмотрим задачу Коши для скалярного закона сохранения

$$u_t + div_x(\Phi(u)) = 0, \ u|_{t=0} = g(x) \tag{2.40}$$

в $U = \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$. Положим $y = (x, t)$, $t = x_{n+1}$, тогда закон сохранения принимает вид (2.27), где $F(p, z, x) = p_{n+1} + \sum_{j=1}^{n} \Phi_j'(z) p_j$. Тогда

$$\nabla_x F = 0, \ \partial_z F = \sum_{j=1}^{n} F_j'' p_j, \ \nabla_p F = (\Phi'(z), 1).$$

Очевидно, что условие нехарактеристичности выполнено для всех точек $y^0 \in \Gamma$, $\Gamma = \mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$. Кроме того, из системы характеристик (2.35) имеем

$$\dot{x}_i(s) = \Phi_i'(z(s)),\ \dot{t} = 1,$$

и можно считать, что $t = s$. Далее,

$$\dot{z}(s) = \sum_{j=1}^{n} \Phi_j'(z(s))p_j + p_{n+1} = 0$$

в силу (2.40). Таким образом, $z(s) = z^0 = g(x^0)$, откуда $x_i(s) = \Phi_i'(g(x^0))s + x^0$. Значит, спроектированная характеристика $y(s) = (x(s), s)$ – прямая, вдоль которой функция $u(x)$ постоянна. Пусть теперь $h^0 \in \Gamma$ – другая точка, причем $g(h^0) \neq g(x^0)$. Тогда характеристики, выходящие из точек h^0 и x^0, могут пересечься в некоторый момент времени $t_0 > 0$. Но тогда в точке пересечения мы придем к противоречию, т.к. $u(x)$ должна быть постоянной и различной вдоль этих характеристик. Значит, *задача (2.40) в общем случае не имеет гладкого решения, существующего при всех $t > 0$.*

Литература:
Л.К.Эванс, „Уравнения с частными производными“, §3.1-3.2.4.

2.4 Уравнение Гамильтона-Якоби и его классическое решение.

2.4.1 Нестационарное уравнение Гамильтона-Якоби.

Определение 2.4.1 *Нелинейное УрЧП первого порядка вида*

$$u_t + H(\nabla_x u, x) = 0 \tag{2.41}$$

называется **нестационарным уравнением Гамильтона-Якоби***, а функция $H(p, x) \in C^1$ –* **Гамильтонианом***. В этом случае в классической механике принято обозначать неизвестную функцию $u(t, x)$ через $S(t, x)$ и называть функцией действия.*

Данные Коши для уравнения (2.41) имеют вид $u|_{t=0} = S_0(x)$, $x \in \Omega_0 \subseteq \mathbb{R}^n$. Проинтегрируем задачу Коши

$$\begin{cases} u_t + H(\nabla_x u, x) = 0, \\ u|_{t=0} = S_0(x) \end{cases} \tag{2.42}$$

с помощью метода характеристик, рассмотренного в предыдущей теме. Используя принятые ранее обозначения, имеем $F(p,z,x) = p_{n+1} + H(p,x)$, откуда, так как $\nabla_p F = \nabla_p H$ и $\nabla_x F = \nabla_x H$, следует, что система характеристик имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \nabla_p H, \\ \dot{t} = 1, \\ \dot{p} = -\nabla_x H, \\ \dot{z} = < p, \nabla_p H > + p_{n+1}, \end{cases} \tag{2.43}$$

и начальные условия для нее

$$t(0) = 0,\ x(0) = x^0 \in \Omega_0,\ p(0) = \nabla_x S_0(x^0),\ z(0) = S_0(x^0) \tag{2.44}$$

Нетрудно видеть, что такие начальные условия – допустимые, а поверхность $\Gamma = \Omega_0 \times \{t = 0\}$ удовлетворяет условию нехарактеристичности. Кроме того, можно отождествить время t и параметр характеристики s. Отсюда следует, что уравнения на x и p системы (2.43) с начальными условиями из (2.44) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \dot{x} = \nabla_p H,\ x(0) = x^0, \\ \dot{p} = -\nabla_x H,\ p(0) = \nabla_x S_0(x^0), \end{cases} \tag{2.45}$$

Эта система называется системой ОДУ Гамильтона. Пусть $x = X(x^0, t)$, $p = P(x^0, t)$ – ее решение. В силу леммы о локальной обратимости, при малых t существуют функции $x^0(x,t)$ обратные к $x = X(x^0,t)$. Далее, в силу равенства $p_{n+1} + H(p,x) = 0$ последнее из уравнений системы характеристик (2.43) можно переписать в виде $\dot{z} = < p, \nabla_p H > - H(p,x)$, откуда

$$z(x^0,t) = \int_0^t \left(\sum_{j=1}^n P_j(x^0,\tau) H_{p_j}(P(x^0,\tau), X(x^0,\tau)) - H(P(x^0,\tau), X(x^0,\tau)) \right) d\tau + \\ + S_0(x^0), \tag{2.46}$$

и, подставляя в (2.46) равенство $x^0 = x^0(x,t)$, получаем решение задачи Коши (2.42): $u(t,x) = z(x^0(x,t),t)$.

Пример. (Движение частицы равномерно и прямолинейно).
Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} u_t + \frac{1}{2m} u_x^2 = 0, \\ u|_{t=0} = \frac{\alpha x^2}{2}. \end{cases}$$

В этом случае система ОДУ Гамильтона (2.45) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p}{m},\ x(0) = x^0, \\ \dot{p} = 0,\ p(0) = \alpha x^0, \end{cases}$$

и ее решение $P(x^0,t)=\alpha x^0$, $X(x^0,t)=\frac{\alpha x^0}{m}t+x^0$, откуда

$$z(x^0,t)=\int_0^t\left(\alpha x^0\cdot\frac{\alpha x^0}{m}-\frac{\alpha^2(x^0)^2}{2m}\right)d\tau+\frac{\alpha(x^0)^2}{2}=(\frac{\alpha}{2}+\frac{\alpha^2}{2m}t)(x^0)^2.$$

Далее, выражая x^0 через x и t, имеем

$$x^0=\frac{x}{1+\frac{\alpha t}{m}}=\frac{mx}{m+\alpha t},$$

откуда получаем ответ:

$$u(t,x)=\frac{\alpha}{2}\cdot\left(1+\frac{\alpha t}{m}\right)\frac{m^2x^2}{(m+\alpha t)^2}=\frac{\alpha m x^2}{2(m+\alpha t)}.$$

Физический смысл: система ОДУ Гамильтона эквивалентна уравнению $m\ddot{x}=0$ (нет внешних сил), функция Гамильтона равна $H(p)=\frac{p^2}{2m}$ – кинетическая энергия в силу $\dot{x}=\frac{p}{m}$.

Упражнения. 1. Каков физический смысл функции $u(t,x)$?
2. Проверить, что начальные условия (2.44) являются допустимыми, а поверхность Γ удовлетворяет условию нехарактеристичности.

2.4.2 Стационарное уравнение Гамильтона-Якоби.

Определение 2.4.2 Стационарным уравнением Гамильтона-Якоби *называется УрЧП*

$$H(\nabla_x u,x)=0,$$

где функция $H(p,x)\in C^1$.

Пусть $\Gamma=\{x(\xi),\ \xi\in D\subseteq\mathbb{R}^{n-1}\}$ – гладкая гиперповерхность. Поставим задачу Коши для стационарного уравнения Гамильтона-Якоби следующим образом:

$$\begin{cases} H(\nabla_x u,x)=0,\\ u|_\Gamma=S_0(\xi).\end{cases}\tag{2.47}$$

Предположим, что существует функция $P_0(\xi)$ такая, что тройка $(P_0(\xi),S_0(\xi),x(\xi))$ – допустимая. Тогда система характеристик для задачи (2.47) имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}=\nabla_p H,\ x|_{s=0}=x(\xi),\\ \dot{p}=-\nabla_x H,\ p|_{s=0}=P_0(\xi).\end{cases}\tag{2.48}$$

При этом, очевидно, $\dot{z} =< p, \nabla_p H >$, $z|_{s=0} = S_0(\xi)$. Пусть $x = X(s,\xi)$, $p = P(s,\xi)$ – решение (2.48). Пусть также выполнено условие нехарактеристичности

$$< \nabla_p H(P_0(\xi), x(\xi)), \nu(\xi) > \neq 0,$$

где $\nu(\xi)$ – единичная внешняя нормаль к Γ в точке $x(\xi)$. Тогда по лемме о локальной обратимости существуют обратные функции $s = S(x)$, $\xi = K(x)$ к $x = X(s,\xi)$. Отсюда

$$z(s,\xi) = \int_0^s < P(\tau,\xi), \nabla_p H(P(\tau,\xi), X(\tau,\xi) > d\tau + S_0(\xi),$$

и решение задачи (2.47) имеет вид

$$u(x) = z(S(x), K(x)).$$

<u>Пример</u> (Уравнение эйконала в случае размерности 2).
Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} |\nabla u| = 1, \\ u|_{x_1^2+x_2^2=1} = 0. \end{cases}$$

В этом случае естественная параметризация начальной гиперповерхности Γ имеет вид $\Gamma = \{(\cos\xi, \sin\xi),\ \xi \in [0, 2\pi)\}$. Найдем $P_0(\xi)$ так, чтобы тройка $(P_0(\xi), 0, x(\xi))$ была допустимой. Для этого запишем условия согласования (2.36):

$$|P_0(\xi)| = 1,\ dS_0(\xi) = 0 =< P_0(\xi), dx(\xi) > .$$

Отсюда в силу первого уравнения имеем $P_0(\xi) = (\cos\theta(\xi), \sin\theta(\xi))$, и в силу второго уравнения получаем

$$-\cos\theta \sin\xi + \sin\theta\cos\xi = 0,$$

т.е. $\sin(\theta(\xi) - \xi) = 0$, откуда $\theta(\xi) = \xi$ или $\theta(\xi) = \pi + \xi$. Тем самым, можно выбрать два различных допустимых вектора $P_0(\xi)$, т.е. решение исходной задачи Коши не единственно. Пусть $\theta(\xi) = \xi$, тогда $P_0(\xi) = (\cos\xi, \sin\xi)$, и система (2.48) имеет вид

$$\dot{x}_1 = 2p_1,\ \dot{x}_2 = 2p_2,\ \dot{p}_1 = 0,\ \dot{p}_2 = 0,$$

откуда $x_1 = (1+2s)\cos\xi$, $x_2 = (1+2s)\sin\xi$, $p_1(\xi) = \cos\xi$, $p_2(\xi) = \sin\xi$,

$$z(s,\xi) = \int_0^s (p_1(\xi)\cdot 2p_1(\xi) + p_2(\xi)\cdot 2p_2(\xi))\, d\tau + 0 = 2s.$$

Далее, так как $(1+2s)^2 = x_1^2 + x_2^2$, то решение исходной задачи обязано иметь вид $u(x) = \pm\sqrt{x_1^2+x_2^2} - 1$. Очевидно, что знак „минус“не удовлетворяет начальному условию, откуда получаем <u>ответ:</u> $u(x) = \sqrt{x_1^2+x_2^2} - 1$.

<u>Упражнение.</u> Проинтегрировать уравнение эйконала для случая $\theta(\xi) = \pi + \xi$.

2.4.3 Вариационное исчисление. Связь с ОДУ Гамильтона.

Определение 2.4.3 Лагранжианом *назовем функцию* $L\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $L = L(q,x) \in C^1$. *Зафиксируем точки* $w_1,\ w_2 \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$. **Функционалом действия** *называется*

$$I(w(\cdot)) = \int_0^t L(\dot{w}(s), w(s))ds.$$

При этом считается, что функция $w(s)$ *принадлежит допустимому классу*

$$\mathcal{A} = \{w(\cdot) \in C^2([0,t]),\ w\colon [0,t] \to \mathbb{R}^n,\ w(0) = w_1,\ w(t) = w_2\}.$$

Задача вариационного исчисления *состоит в нахождении кривой* $x(s) \in \mathcal{A}$ *такой, что*

$$I(x(\cdot)) = \min_{w(\cdot)\in\mathcal{A}} I(w(\cdot)) \tag{2.49}$$

Теорема 2.4.1 (уравнения Эйлера-Лагранжа) *Пусть* $x(s)$ *– решение (2.49) – существует. Тогда* $x(s)$ *– решение системы уравнений Эйлера-Лагранжа*

$$-\frac{d}{ds}\left(\nabla_q L(\dot{x}(s), x(s))\right) + \nabla_x L(\dot{x}(s), x(s)) = 0. \tag{2.50}$$

Доказательство. Выберем функцию $v \in C^2([0,t])$ такую, что $v\colon [0,t] \to \mathbb{R}^n$, $v(0) = v(t) = 0$. Пусть $\tau \in \mathbb{R}$. Положим $w(s,\tau) = x(s) + \tau v(s)$. Тогда $w(\cdot,\tau) \in \mathcal{A}$ для всех τ, откуда $I(x(\cdot)) \le I(w(\cdot,\tau))$ в силу того, что $x(s)$ – решение (2.49). Обозначим $f(\tau) = I(w(\cdot,\tau))$. Тогда из вышесказанного следует, что функция $f(\tau)$ имеет минимум в точке $\tau = 0$. Значит, $f'(0) = 0$. Вычисляя эту производную явно, имеем

$$f'(\tau) = \int_0^t \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial L}{\partial q_j}(\dot{x} + \tau\dot{v}, x + \tau v)\dot{v}_j + \frac{\partial L}{\partial x_j}(\dot{x} + \tau\dot{v}, x + \tau v)v_j\right) ds.$$

Используя равенство $v(0) = v(t) = 0$ и интегрируя по частям первое слагаемое, в силу равенства $f'(0) = 0$ имеем

$$\sum_{j=1}^n \int_0^t \left(-\frac{d}{ds}(\frac{\partial L}{\partial q_j}(\dot{x}, x)) + \frac{\partial L}{\partial x_j}(\dot{x}, x)\right) v_j ds = 0.$$

Так как это равенство выполнено для всех гладких функций $v(s)$, удовлетворяющих граничным условиям, то отсюда следует, что

$$-\frac{d}{ds}(\frac{\partial L}{\partial q_j}(\dot{x}, x)) + \frac{\partial L}{\partial x_j}(\dot{x}, x) = 0\ \forall j = 1, \dots, n,$$

и, переписывая это в векторной форме, получаем (2.50).
Теорема доказана.

Покажем, что система ОДУ второго порядка (2.50) преобразуется к системе ОДУ Гамильтона. Пусть $x(s)$ – решение (2.50). Положим $p(s) = \nabla_q L(\dot{x}(s), x(s))$ – обобщенный момент, соответствующий координате $x(s)$ и скорости $\dot{x}(s)$. Потребуем, чтобы было выполнено следующее условие.

Условие 2.4.1 (Условие разрешимости.) *Пусть $\forall x, p \in \mathbb{R}^n$ уравнение $p = \nabla_q L(q, x)$ однозначно разрешимо относительно q как гладкой функции p, x.*

Определение 2.4.4 *Гамильтониан H, ассоциированный с лагранжианом L – это функция $H(p, x) =< p, q(p, x) > -L(q(p, x), x)$.*

Теорема 2.4.2 *Функции $x(s)$ и $p(s)$ удовлетворяют системе ОДУ Гамильтона (2.45). Кроме того, функция $H(p, x)$ – первый интеграл этой системы.*

Доказательство. Так как $p(s) = \nabla_q L(\dot{x}(s), x(s))$ и выполнено условие разрешимости, то $\dot{x}(s) = q(p(s), x(s))$. Далее,

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{n} \left(p_k \frac{\partial q_k}{\partial x_i} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial x_i}(p, x) \right) - \frac{\partial L}{\partial x_i}(q, x).$$

В силу условия разрешимости имеем $p_k = \frac{\partial L}{\partial q_k}(q(p, x), x)$. Значит, сумма в предыдущем равенстве состоит из нулевых слагаемых. Следовательно, $\frac{\partial H}{\partial x_i} = -\frac{\partial L}{\partial x_i}(q, x)$. Аналогично,

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = q_i(p, x) + \sum_{k=1}^{n} \left(p_k \frac{\partial q_k}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial q_k} \frac{\partial q_k}{\partial p_i} \right) = q_i(p, x).$$

Таким образом, $\frac{\partial H}{\partial p_i}(p(s), x(s)) = q_i(p(s), x(s)) = \dot{x}_i(s)$;

$$\frac{\partial H}{\partial x_i}(p(s), x(s)) = -\frac{\partial L}{\partial x_i}(q(p(s), x(s)), x(s)) =$$

$$= -\frac{\partial L}{\partial x_i}(\dot{x}(s), x(s)) = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial L}{\partial q_i}(\dot{x}(s), x(s)) \right) = -\dot{p}_i(s).$$

Таким образом, функции $p(s), x(s)$ удовлетворяют (2.45). Кроме того,

$$\frac{d}{ds} H(p(s), x(s)) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} \dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial x_i} \dot{x}_i \right) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i} (-\frac{\partial H}{\partial x_i}) + \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = 0.$$

Таким образом, $H(p,x)$ – первый интеграл системы (2.45).
Теорема доказана.

Упражнение. Обосновать дифференцируемость функции $f(\tau)$, определенной в доказательстве теоремы 2.4.1.

2.4.4 Преобразование Лежандра. Выпуклая двойственность гамильтониана и лагранжиана.

Пусть $f(x)$ – выпуклая функция, $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, т.е. $\forall \tau \in (0,1)$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство $f(\tau x + (1-\tau)y) \leq \tau f(x) + (1-\tau) f(y)$.

Определение 2.4.5 Преобразованием Лежандра *выпуклой функции* $f(x)$ *называется* $g(p) = \max\limits_x F(p,x)$, *где* $F(p,x) = < p, x > -f(x)$.

Если функция $f(x)$ дифференцируема, то $F(p,x)$ дифференцируема по x. Положим $x^* = x(p)$ – аргумент, при котором $F(p,x)$ максимальна. Тогда $\nabla_x F(p,x^*) = 0$, откуда $p = \nabla_x f(x^*)$, и, если такое x^* существует, то выполнено условие разрешимости, а именно, уравнение $p = \nabla_x f(x)$ разрешимо относительно x. Поэтому $g(p) = f^*(p) = < p, x(p) > -f(x(p))$, и при этом $p = \nabla_x f(x(p))$. Таким образом, гамильтониан $H(p,x)$ является преобразованием Лежандра по q для лагранжиана $L(q,x)$ в силу определений из предыдущего пункта. Для простоты изложения будем далее опускать зависимость от x в H и L, т.е. писать $H = H(p)$, $L = L(q)$.

Теорема 2.4.3 (Выпуклая двойственность.) *Пусть отображение* $L(q)$ *выпуклое. Тогда* $H(p) = L^*(p)$ *также выпуклое, и* $H^*(q) = L(q)$.

Доказательство. Пусть q фиксировано. Тогда функция $< p, q > -L(q)$ линейна, и для $p, \hat{p} \in \mathbb{R}^n$, $\tau \in (0,1)$ в силу определения преобразования Лежандра имеем $H(p) = L^*(p) = < p, q(p) > -L(q(p))$,

$$H(\tau p + (1-\tau)\hat{p}) = \sup_q \{< \tau p + (1-\tau)\hat{p}, q > -L(q)\} \leq$$

$$\leq \tau \sup_q \{< p, q > -L(q)\} + (1-\tau) \sup_q \{< \hat{p}, q > -L(q)\} = \tau H(p) + (1-\tau) H(\hat{p}).$$

Значит, по определению, функция $H(p)$ выпукла.
Далее, в силу определения, $H(p) = L^*(p) = < p, q(p) > -L(q(p)) \geq < p, q > -L(q)$ $\forall p, q \in \mathbb{R}^n$, откуда $L(q) \geq \sup\limits_{p \in \mathbb{R}^n} \{< p, q > -H(p)\} = H^*(q)$. С другой стороны,

$$H^*(q) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} \{< p, q > - \sup_r \{< p, r > -L(r)\}\},$$

$$H^*(q) = \sup_p \inf_r \{< p, q - r > + L(r)\}. \tag{2.51}$$

Так как отображение $L(q)$ выпукло, то для любого $q \in \mathbb{R}^n$ найдется $s \in \mathbb{R}^n$ такое, что для любого $r \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство

$$L(r) \geq L(q) + < s, r - q > . \tag{2.52}$$

Далее, полагая $p = s$ в (2.51), получаем $H^*(q) \geq \inf_r \{< s, q - r > + L(r)\} = L(q)$, откуда и из доказанного ранее неравенства $H^*(q) \leq L(q)$ следует, что $H^*(q) = L(q)$.
Теорема доказана.

Функции $f(x)$ и $f^*(p)$ называются сопряженными по Юнгу.

Упражнения. 1. Доказать неравенство Юнга: $< p, x > \leq f(x) + f^*(p)$.
2. Пусть $f(x) = \frac{|x|^r}{r}$, $r > 1$. Доказать, что $f^*(p) = \frac{|p|^s}{s}$, где $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = 1$.
3. Доказать, что если $L(q)$ – дифференцируемое выпуклое отображение, то для любого $q \in \mathbb{R}^n$ найдется $s \in \mathbb{R}^n$, такое, что $\forall r \in \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство (2.52).

2.4.5 Геометрическая интерпретация уравнения Гамильтона-Якоби. Интегральный инвариант Пуанкаре-Картана.

Рассмотрим фазовое пространство $\mathbb{R}^{2n}_{x,p} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ и задачу Коши для нестационарного уравнения Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(\nabla_x S, x) = 0,\ S|_{t=0} = S_0(x),\ x \in \Omega_0. \tag{2.53}$$

Решению задачи (2.53) – функции $S(x,t)$ – сопоставим в фазовом пространстве поверхность

$$\Lambda_t = \{(x,p),\ x = X(x^0,t),\ p = P(x^0,t),\ x^0 \in \Omega_0\},$$

где $X(x^0,t)$ и $P(x^0,t)$ – решения системы ОДУ Гамильтона с начальными условиями $X|_{t=0} = x^0$, $P|_{t=0} = \nabla S(x^0)$. Изучим сначала свойства поверхности Λ_0. Пусть $a, b \in \Lambda_0$, γ – произвольный путь по Λ_0 из a в b. Заметим, что

$$\int\limits_{\gamma(a\to b)} pdx = \int\limits_{\gamma(a\to b)} \nabla S_0(x)dx = \int_a^b dS_0 = S_0(b) - S_0(a),$$

т.е. этот интеграл не зависит от выбора пути γ. Заметим, что это свойство эквивалентно тому, что для любого замкнутого пути $\gamma \subset \Lambda_0$ верно равенство $\oint\limits_\gamma pdx = 0$.

Определение 2.4.6 *Гладкая поверхность Λ размерности n в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n}_{x,p}$ называется* **лагранжевой поверхностью**, *если для любого замкнутого пути γ по этой поверхности, стягиваемого в точку, верно $\oint\limits_{\gamma} pdx = 0$.*

Свойство лагранжевости поверхности Λ можно переформулировать так: пусть $\Lambda = \{(x(\alpha), p(\alpha)),\ \alpha \in \Omega \subseteq \mathbb{R}^n\}$. Тогда Λ – лагранжева, если для любых i, j имеет место равенство

$$< \frac{\partial x}{\partial \alpha_j}, \frac{\partial p}{\partial \alpha_i} > - < \frac{\partial x}{\partial \alpha_i}, \frac{\partial p}{\partial \alpha_j} >= 0. \tag{2.54}$$

Выражение в левой части (2.54) называется скобкой Лагранжа функций $x(\alpha)$, $p(\alpha)$ по переменным α_i, α_j.

Утверждение 2.4.1 *Если все скобки Лагранжа равны нулю во всех точках поверхности Λ, то поверхность Λ – лагранжева.*

Доказательство. Пусть $\gamma \subset \Lambda$ – замкнутый путь, стягиваемый в точку. Тогда по формуле Стокса имеем

$$\oint\limits_{\gamma} pdx = \int\limits_{Int\gamma} dp \wedge dx = \int\limits_{Int\gamma} \sum_{k=1}^{n} dp_k(\alpha) \wedge dx_k(\alpha) = 0$$

в силу (2.54) и того, что

$$dp_k \wedge dx_k = \sum_{i,j} \left(\frac{\partial p_k}{\partial \alpha_i} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_j} - \frac{\partial p_k}{\partial \alpha_j} \frac{\partial x_k}{\partial \alpha_i} \right) d\alpha_i d\alpha_j.$$

Утверждение доказано.

Если теперь рассмотреть поверхность Λ_t, то оказывается, что имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2.4.2 *Поверхность Λ_t – лагранжева при малых t.*

Доказательство. В силу нехарактеристичности поверхности $\Gamma = \{t = 0\}$ и допустимости начальных условий уравнения $x = X(x^0, t)$ локально разрешимы относительно x^0 по лемме о локальной обратимости, т.е. $x^0 = \chi(x, t)$. Значит, Λ_t при фиксированном t является графиком зависящей от x функции $P(\chi(x, t), t)$. В силу теоремы 2.3.3, $P(x, t) = \nabla_x S(x, t)$. Отсюда, как и для Λ_0, получаем

лагранжевость поверхности Λ_t.
Утверждение доказано.

Рассмотрим теперь расширенное фазовое пространство $\mathbb{R}^{2n+2}$ с координатами (x, t, p, p_{n+1}). Определим „расширение“ поверхности Λ_t следующим образом:

$$\Lambda^{n+1}_{[0,T]} = \{(x, t, p, p_{n+1}),\ x = X(x^0, t),\ p = P(x^0, t),$$
$$p_{n+1} = -H(x, t, p),\ x^0 \in \Omega_0,\ t \in [0, T]\}.$$

Утверждение 2.4.3 *Поверхность $\Lambda^{n+1}_{[0,T]}$ – лагранжева.*

Доказательство. Пусть a, b – две точки на поверхности $\Lambda^{n+1}_{[0,T]}$, $l(a \to b)$ – произвольный путь из a в b по поверхности. Тогда

$$\int\limits_l p dx + p_{n+1} dt = \int\limits_l p dx - H dt = \int\limits_l < \nabla S, dx > - H dt =$$

$$= \int\limits_l < \nabla S, dx > + \frac{\partial S}{\partial t} dt = \int_a^b d_{x,t} S = S(b) - S(a),$$

откуда следует доказываемое.

Следствие 2.4.1 *Пусть γ_1 и γ_2 – две кривые, охватывающие одну и ту же трубку фазовых траекторий системы ОДУ Гамильтона. Тогда*

$$\oint\limits_{\gamma_1} p dx - H dt = \oint\limits_{\gamma_2} p dx - H dt.$$

Определение 2.4.7 *Дифференциальная форма $pdx - Hdt$ называется интегральным инвариантом Пуанкаре-Картана.*

2.4.6 Геометрическая оптика.

Цель этого пункта – построить аналогию между различными понятиями геометрической оптики и гамильтоновой механики. Известно, что в геометрической оптике имеет место принцип Ферма: свет распространяется из точки x_0 в точку x_1 за кратчайшее время. Будем считать, что скорость света при этом зависит как от точки x_0 (неоднородная среда), так и от направления луча (неизотропная среда). Пусть x_0 – фиксированная точка, $t > 0$. Обозначим $\Phi(x_0, t)$ множество точек, до которых свет из точки x_0 может дойти за время, не превосходящее t. Граница множества $\Phi(x_0, t)$ – множество $\partial\Phi(x_0, t)$ – называется волновым фронтом, соответствующим точке x_0 и моменту времени t.

Теорема 2.4.4 (Принцип Гюйгенса.) *Пусть $x \in \partial\Phi(x_0, t)$. Построим волновой фронт $\partial\Phi(x, s)$ через время $s > 0$. Тогда $\partial\Phi(x_0, t+s)$ – огибающая семейства фронтов $\partial\Phi(x, s)$, соответствующих всем точкам $x \in \partial\Phi(x_0, t)$.*

Доказательство. Пусть $x_{t+s} \in \partial\Phi(x_0, t+s)$. Тогда существует путь $l(x_0 \to x_{t+s})$, который свет проходит за время $t+s$, и нет более короткого пути. Рассмотрим точку $x_t \in l(x_0 \to x_{t+s})$, до которой свет из x_0 доходит за время t. Более короткого пути из x_0 в x_t нет, иначе путь $l(x_0 \to x_{t+s})$ – не кратчайший. Следовательно, $x_t \in \partial\Phi(x_0, t)$. Аналогично, $x_{t+s} \in \partial\Phi(x_t, s)$. Покажем, что $\partial\Phi(x_0, t+s)$ и $\partial\Phi(x_t, s)$ касаются в точке x_{t+s}. Действительно, иначе нашлась бы точка $y \in \partial\Phi(x_0, t+s)$ такая, что она лежит строго внутри $\Phi(x_t, s)$. Но тогда в точку y можно добраться за время меньшее, чем $t+s$, т.е. $y \notin \partial\Phi(x_0, t+s)$. Противоречие.
Теорема доказана.

Из принципа Гюйгенса следует, что распространение света можно описывать, описывая лучи (и их направление – скорость $\dot{x}$), а можно – описывая волновые фронты.

Определение 2.4.8 Оптической длиной пути *от точки x_0 до x назовем $S(x_0, x)$ – наименьшее время распространения света от точки x_0 до точки x. Тогда $\partial\Phi(x_0, t) = \{x \colon S(x_0, x) = t\}$. Вектор нормали к фронту $p = \nabla_x S(x_0, x)$ назовем вектором нормальной медлительности фронта.*

Из вышесказанного следует аналогия между геометрической оптикой и гамильтоновой механикой:
принципу Ферма в оптике соответствует вариационный принцип Гамильтона $\int L dt \to \min$ в механике;
лучам соответствуют траектории материальных точек $x(t)$;
свойства среды в механике описываются лагранжианом L;
вектору нормальной медлительности фронта соответствует обобщенный импульс;
выражение нормальной медлительности фронта через скорость луча в оптике соответствует преобразованию Лежандра;
интегральному инварианту $< p, dx >= dS$ соответствует интегральный инвариант Пуанкаре-Картана;
оптической длине пути из x_0 в x соответствует функция действия $S(x, t)$;
принципу Гюйгенса, описывающему волновые фронты, соответствует уравнение Гамильтона-Якоби на функцию действия.

<u>**Литература.**</u>

Л.К.Эванс, „Уравнения с частными производными“, §3.3.1

Доброхотов, §4-§6
В.И. Арнольд, „Математические методы классической механики“

2.5 Коротковолновые асимптотики для УрЧП.

2.5.1 Постановка задачи и общая идея метода.

Рассмотрим уравнение математической физики

$$\Phi(u, x, t, \nabla_x u, u_t, D^2_{x,t} u, h) = 0, \tag{2.55}$$

описывающее какой-либо имеющий волновую природу процесс; h – малый параметр. Решить такое уравнение *точно* – даже при малых t – задача весьма непростая. Идея метода коротковолновых асимптотик состоит в том, чтобы найти функцию $\hat{u}(x, t, h)$ – приближенное решение (2.55) при малых t такое, что

$$\Phi(\hat{u}, x, t, \nabla_x \hat{u}, \hat{u}_t, D^2_{x,t} \hat{u}, h) = O(h^2),\ h \to 0.$$

При этом используется следующее предположение: так как уравнение (2.55) описывает волновой процесс, то локально в каждой точке в фиксированный момент времени t решение – синусоидальная волна, однако, амплитуда этой волны и ее направление фронта зависят и от точки, и от момента времени. Тем самым, $\hat{u}(x, t, h)$ ищется в виде

$$\hat{u}(x, t, h) = \phi(x, t) \exp(\frac{i}{h} S(x, t)). \tag{2.56}$$

При этом предполагается, что начальные данные для амплитуды $\phi(x, t)$ – функцию $\phi_0(x)$ и для фазы $S(x, t)$ – функцию $S_0(x)$ можно найти из физических соображений. Далее приближенное решение вида (2.56) необходимо формально подставить в (2.55) и приравнять к нулю коэффициенты при двух наиболее медленно стремящихся к нулю степенях h (обычно h^0 и h^1). Полученные уравнения на амплитуду ϕ и фазу S будут УрЧП первого порядка, которые можно решить с помощью рассмотренных в предыдущих параграфах методов. Строгого обоснования метода коротковолновых асимптотик мы приводить не будем, но рассмотрим подробно несколько примеров. Метод позволяет стрить решения при малых $t < T_0$. При исследовании моментов времени $t > T_0$ даже при сколь угодно гладких $\phi_0(x)$ и $S_0(x)$ у построенных решений $\hat{u}$ могут возникать разрывы, т.е. построенная в предыдущих параграфах классическая теория становится неприменима.

2.5.2 Коротковолновая асимптотика для уравнения Шредингера.

Рассмотрим уравнение Шредингера с потенциалом $U(x)$:

$$ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2}\Delta\psi + U(x)\psi. \tag{2.57}$$

Для подстановки $\hat{u}(x,t,h)$ вида (2.56) в (2.57) сделаем сначала вспомогательное вычисление:

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\hat{u} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x_k}e^{\frac{i}{h}S} + \frac{i}{h}\frac{\partial S}{\partial x_k}\cdot\phi e^{\frac{i}{h}S}\right),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}\hat{u} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x_k^2}e^{\frac{i}{h}S} + \frac{2i}{h}\frac{\partial\phi}{\partial x_k}\frac{\partial S}{\partial x_k}e^{\frac{i}{h}S} + \frac{i}{h}\frac{\partial^2 S}{\partial x_k^2}\cdot\phi e^{\frac{i}{h}S} - \frac{1}{h^2}\left(\frac{\partial S}{\partial x_k}\right)^2\phi e^{\frac{i}{h}S}. \tag{2.58}$$

Подставляя $\hat{u}$ вида (2.56) в (2.57) и используя (2.58), получаем:
при h^0:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2} < \nabla_x S, \nabla_x S > + U(x) = 0,\ S|_{t=0} = S_0(x). \tag{2.59}$$

Задача (2.59) – задача Коши для нестационарного уравнения Гамильтона-Якоби с гамильтонианом $H(p,x) = \frac{1}{2} < p, p > + U(x)$. Задачи такого типа мы подробно исследовали в разделе 2.4.1.
При h^1:

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + < \nabla_x\phi, \nabla_x S > + \frac{1}{2}\Delta S\cdot\phi = 0,\ \phi|_{t=0} = \phi_0(x).$$

Это задача Коши для уравнения переноса, которая была подробно разобрана в качестве примера в разделе 2.2.3. Вспоминая, как именно в явном виде интегрируется уравнение переноса, имеем

$$\phi(x,t) = \left.\frac{\phi_0(x^0)}{\sqrt{J_x(X^0,t)}}\right|_{x^0 = x^0(x,t)},$$

где $J_x(x^0,t) = \det(\frac{\partial X_i}{\partial \xi_j})|_{(x^0,t)}$, $x = X(\xi,t)$ – решение $\dot{x} = v$, $x(0) = \xi$, и функция $v(x,t) = \nabla_x S(x,t)$. Таким образом, проинтегрировав уравнение (2.59), по указанным формулам получаем коротковолновую асимптотику $\hat{u}(x,t,h)$.

2.5.3 Коротковолновая асимптотика для волнового уравнения.

Рассмотрим волновое уравнение

$$u_{tt} = a^2(x,t)\Delta u,\ a(x,t) \neq 0.$$

Подставляя $\hat{u}(x,t,h)$ вида (2.56) и используя (2.58), получаем:
при h^{-2}:

$$-(\frac{\partial S}{\partial t})^2 = a^2(x,t)\sum_{k=1}^{n}\left(-(\frac{\partial S}{\partial x_k})^2\right),\ S|_{t=0} = S_0(x). \tag{2.60}$$

Задача (2.60) – задача Коши для стационарного уравнения Гамильтона-Якоби с гамильтонианом $H(p,p_{n+1},x,t) = a^2(x,t) < p,p > -p_{n+1}^2$. Задачи такого типа подробно изучались в разделе 2.4.2.
При h^{-1}:

$$2\frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial S}{\partial t} + \phi\frac{\partial^2 S}{\partial t^2} = a^2(x,t)\sum_{k=1}^{n}\left(2\frac{\partial \phi}{\partial x_k}\frac{\partial S}{\partial x_k} + \phi\frac{\partial^2 S}{\partial x_k^2}\right),\ \phi|_{t=0} = \phi_0(x).$$

Это задача Коши для линейного УрЧП первого порядка, которую можно проинтегрировать с помощью обобщенного алгоритма А2, приведенного в разделе 2.2.3.

Замечание 2.5.1 *Система ОДУ Гамильтона для (2.60) имеет вид*

$$\begin{cases} \dot{x} = 2a^2(x,t)p, \\ \dot{t} = -2p_{n+1}, \\ \dot{p} = -2a(x,t) < p,p > \nabla_x a, \\ \dot{p}_{n+1} = -2a(x,t) < p,p > a_t. \end{cases}$$

При этом нетрудно видеть, что поверхности $\{t = 0\}$ соответствует две допустимых тройки, удовлетворяющие условию нехарактеристичности, если $|\nabla_x S_0(x^0)| \neq 0$. Этим двум допустимым тройкам соответствуют два решения $S_\pm(x,t)$ задачи (2.60). Если же условие $|\nabla_x S_0(x^0)| \neq 0$ не выполнено для некоторого x^0, то построение решения в окрестности точки x^0 методом характеристик достаточно нетривиально. Кроме того, если $a_t = 0\ \forall t$, то система ОДУ Гамильтона сводится к

$$\begin{cases} \dot{x} = 2a^2(x)p, \\ \dot{p} = -2a(x) < p,p > \nabla_x a, \end{cases}$$

$t = -2p_{n+1}^0 s$, и два решения $S(x,t)$ задачи (2.60) будут удовлетворять соотношению

$$S_+(x,-t) = -S_-(x,t).$$

Литература.

В.И. Арнольд, „Математические методы классической механики“

Глава 3

Обобщенные решения.

3.1 Обобщенные решения задачи Коши для закона сохранения.

3.1.1 Интегральное решение. Условие Рэнкина-Гюгонио.

Будем рассматривать следующую задачу Коши для скалярного закона сохранения с одной пространственной переменной:

$$\begin{cases} u_t + (F(u))_x = 0, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = g(x), \ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Как было показано в пункте 6.6, задача (3.1) не имеет в общем случае решения, принадлежащего классу C^1 и существующего при всех $t > 0$, даже если функция $g(x) \in C^\infty$. Попробуем обобщить понятие решения задачи (3.1) на более широкий класс функций. Для этого введем сначала класс пробных функций.

Определение 3.1.1 *Множеством пробных функций* $C_0^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ *назовем множество функций* $v(t,x) \in C^\infty(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ *таких, что для функции* $v(t,x)$ *существует компакт* $K \in (\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R})$ *такой, что* $\forall (t,x) \notin K$ *верно* $v(t,x) = 0$.

Домножим теперь уравнение из (3.1) на пробную функцию $v(t,x)$ и проинтегрируем по $[0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Заметим, что без ограничения общности можно считать, что $F(0) = 0$. Далее, интегрируя по частям, получаем:

$$0 = \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (u_t + (F(u))_x) v(t,x) dx dt = -\int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t,x) v_t(t,x) dx dt -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{+\infty} uv dx|_{t=0} - \int\limits_0^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(u) v_x dx dt.$$

Отсюда, учитывая, что $u|_{t=0} = g(x)$, получаем

$$\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(u(t,x)v_t(t,x) + F(u(t,x))v_x(t,x))dxdt + \int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)v(0,x)dx = 0. \qquad (3.2)$$

Заметим, что равенство (3.2) имеет смысл для функций $u(t,x)$ из более широкого класса, чем C^1 – для всех ограниченных функций.

Определение 3.1.2 *Равенство (3.2) будем называть* **интегральным тождеством**, *соответствующим задаче (3.1). Функцию* $u(t,x) \in L^\infty([0,+\infty)\times\mathbb{R})$ *будем называть интегральным решением задачи (3.1) (в другой терминологии – обобщенным решением в смысле интегрального тождества), если для всех пробных функций* $v(t,x)$ *имеет место интегральное тождество (3.2).*

Утверждение 3.1.1 *Пусть* $u(t,x)$ *– интегральное решение задачи (3.1) и* $u(t,x) \in C^1([0,+\infty)\times\mathbb{R})$. *Тогда* $u(t,x)$ *– классическое решение задачи (3.1), т.е. удовлетворяет уравнению (3.1) и начальным условиям.*

Доказательство. В силу того, что $u \in C^1$, равенство (3.2) можно проинтегрировать по частям. Отсюда в силу определения интегрального решения имеем, что $\forall v(t,x) \in C_0^{+\infty}([0,+\infty)\times\mathbb{R})$ верно равенство

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(g(x) - u(0,x))v(0,x)dx - \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(u_t(t,x) + (F(u(t,x)))_x)v(t,x)dxdt = 0. \quad (3.3)$$

Отсюда в силу произвольности выбора функции $v(t,x)$ следует требуемое.

Упражнение. Доказать, что если равенство (3.3) выполнено для всех пробных функций $v(t,x)$, то функция $u(t,x)$ – решение (3.1). Указание: выбрать сначала функции $v(t,x) \in C_0^\infty((0,+\infty)\times\mathbb{R})$.

Попробуем теперь получить некоторую информацию об интегральном решении из (3.2). Пусть V – открытое множество в $[0,+\infty)\times\mathbb{R}$, функция $u(t,x)$ – интегральное решение (3.1), являющееся кусочно-гладкой функцией в V, причем V содержит ровно одну кривую разрыва $c = \{(t,x(t))\}$ функции $u(t,x)$. Обозначим $V_L = \{(t,x) \in V,\ x < x(t)\}$, $V_R = \{(t,x) \in V,\ x > x(t)\}$. Тогда определены пределы слева и справа на кривой разрыва c:

$$u_R(t_0,x_0) = \lim_{V_R \ni (t,x)\to(t_0,x_0)} u(t,x),\ u_L(t_0,x_0) = \lim_{V_L \ni (t,x)\to(t_0,x_0)} u(t,x).$$

Оказывается, что имеет место следующее соотношение между пределами слева и справа на кривой разрыва.

Теорема 3.1.1 (Условие Рэнкина-Гюгонио.) *Пусть кривая разрыва c интегрального решения $u(t,x)$ – график функции $x = x(t)$. Тогда указанное интегральное решение удовлетворяет на кривой c условию Рэнкина-Гюгонио:*

$$\frac{dx}{dt} = \frac{F(u_R) - F(u_L)}{u_R - u_L}. \tag{3.4}$$

Доказательство. Заметим сначала, что $\frac{dx}{dt} = -\frac{\cos(\nu,t)}{\cos(\nu,x)}$, где ν – единичная нормаль к c, направленная из V_L в V_R, $\cos(\nu,t)$ и $\cos(\nu,x)$ – ее направляющие косинусы. Обозначим $[u] = u_R - u_L$ – скачок функции u на кривой разрыва c, $[F(u)] = F(u_R) - F(u_L)$. Заметим, что (3.4) эквивалентно равенству

$$[u]\cos(\nu,t) + [F(u)]\cos(\nu,x) = 0. \tag{3.5}$$

Пусть $v(t,x)$ – пробная функция с компактным носителем в V_L, тогда в силу (3.2) и гладкости $u(t,x)$ в V_L имеем $u_t + (F(u))_x = 0$ в V_L. Аналогичным образом такое равенство имеет место внутри V_R. Пусть теперь $v(t,x)$ – произвольная пробная функция с компактным носителем в V. Тогда в силу (3.2) имеем

$$0 = \iint\limits_{V_L} (uv_t + F(u)v_x)dxdt + \iint\limits_{V_R} (uv_t + F(u)v_x)dxdt,$$

откуда в силу выбора $v(t,x)$ имеем

$$\iint\limits_{V_L} (uv_t + F(u)v_x)dxdt = -\iint\limits_{V_L} (u_t + (F(u))_x)vdxdt +$$

$$+\int_c (u_L\nu_2 + F(u_L)\nu_1)vdl = \int_c (u_L\nu_2 + F(u_L)\nu_1)vdl,$$

где $\nu = (\nu_1,\nu_2) = (\cos(\nu,x),\cos(\nu,t))$ – нормаль к кривой c, описанная выше. Аналогично

$$\iint\limits_{V_R} (uv_t + F(u)v_x)dxdt = -\int_c (u_R\nu_2 + F(u_R)\nu_1)vdl,$$

откуда и из предыдущего равенства в силу произвольности функции $v(t,x)$ получаем (3.5).
Теорема доказана.

Определение 3.1.3 *Кусочно-непрерывные решения задачи (3.1) в смысле интегрального тождества будем называть ударными волнами.*

Утверждение 3.1.2 (Сохранение среднего.) *Пусть* $u(t,x) \in KC^1$, *финитна по* x, *имеет одну кривую разрыва* $x = x(t)$ *и является обобщенным решением (3.1) в смысле интегрального тождества. Обозначим* $S(t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(t,x)dx$ *– пространственное среднее. Тогда* $S(t) = \mathrm{const}$.

Доказательство. Действительно,

$$S(t) = \int\limits_{-\infty}^{x(t)} u(t,x)dx + \int\limits_{x(t)}^{+\infty} u(t,x)dx.$$

Далее,

$$\frac{dS}{dt} = u(t,x(t)-0)\dot{x}(t) + \int\limits_{-\infty}^{x(t)} u_t(t,x)dx - u(t,x(t)+0)\dot{x}(t) + \int\limits_{x(t)}^{+\infty} u_t(t,x)dx =$$

$$= (u_L - u_R)\dot{x}(t) - \int\limits_{-\infty}^{x(t)} (F(u(t,x)))_x dx - \int\limits_{x(t)}^{+\infty} (F(u(t,x)))_x dx =$$

$$= (u_L - u_R)\dot{x}(t) + F(u(t,-\infty)) - F(u(t,x(t)-0)) - F(u(t,+\infty)) + F(u(t,x(t)+0)) =$$
$$= (u_L - u_R)\dot{x}(t) + F(0) - F(u_L) - F(0) + F(u_R) = 0$$

в силу условия Рэнкина-Гюгонио (3.4).
Утверждение доказано.

3.1.2 Пример неединственности интегрального решения.

Пусть $F(u) = u^2$, $g(x) = 0$. Тогда задача Коши (3.1) имеет вид

$$\begin{cases} u_t + 2uu_x = 0, \ t > 0, \ x \in \mathbb{R}, \\ u|_{t=0} = 0, \ x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{3.6}$$

Положим

$$u_\delta(t,x) = \begin{cases} 0, \ x < \delta t, \\ -\delta, \ -\delta t < x < 0, \\ \delta, \ 0 < x < \delta t, \\ 0, \ x > \delta t, \end{cases}$$

где $\delta > 0$. Заметим, что в каждой из областей, где $u_\delta(t,x)$ – гладкая, она является решением (3.6). Проверим условие Рэнкина-Гюгонио на каждой из кривых разрыва. При $x = 0$ получаем: $u_L = -\delta$, $u_R = \delta$, $F(u_R) = F(u_L) = \delta^2$, $[F(u)] = 0$, $[u] = 2\delta$, $\dot{x}(t) = 0$ и условие Рэнкина-Гюгонио выполнено: $0 = \frac{0}{2\delta}$ – верное равенство. Аналогичным образом можно показать, что условие Рэнкина-Гюгонио выполнено и на других кривых разрыва. Тем самым, оказывается, что функция $u_\delta(t, x)$ – интегральное решение задачи (3.6) при любом положительном δ. Заметим, что кусочно-постоянное решение задачи (3.6) с двумя линиями разрыва построить нельзя, т.к. у него должны быть скачки от 0 к некоторому δ и от δ к нулю, а эти разрывы по условию Рэнкина-Гюгонио могут быть только на прямой

$$x = \frac{F(\delta) - F(0)}{\delta - 0} t = \delta t,$$

и линия разрыва одна, а не две, как предполагалось.

Упражнение. Построить обобщенное решение, отличное от тождественного нуля на множестве положительной меры, для

$$u_t + 3u^2 u_x = 0, \ u|_{t=0} = 0.$$

3.1.3 Допустимые разрывы и условие энтропии.

Как было показано в предыдущем пункте, интегральное решение задачи Коши (3.1) вообще говоря, не единственно. Однако, нетрудно видеть, что гладкое (классическое) решение задачи (3.1) единственно при тех $t \in [0, T)$, при которых оно существует. Попробуем понять, какое же из интегральных решений является „наследником“ классического решения, т.е. выделить некое свойство классического решения, которое сохраняется уже не для всех интегральных решений той же задачи Коши, а только для одного из них.

Будем предполагать, что $F''(u) \geq 0$, $F \in C^3$, $g \in C^2$. Пусть гладкое решение задачи (3.1) существует в полосе $\Pi_T = [0, T) \times \mathbb{R}$. Продифференцируем (3.1) по x и положим $p = u_x(t, x)$. Тогда

$$0 = p_t + F'(u)p_x + F''(u)p_x^2 \geq p_t + F'(u)p_x.$$

Вдоль любой характеристике $x(t)$, удовлетворяющей уравнению $\dot{x} = F'(u(t, x(t)))$, из этого неравенства получаем

$$0 \geq p_t + \dot{x}p_x = \frac{dp}{dt},$$

т.е. функция $p(t, x)$ не возрастает вдоль характеристик. Следовательно, для любой точки $(t, x) \in \Pi_T$ верно неравенство $p(t, x) \leq \sup\limits_{\mathbb{R}} g'(x) = K_0$. Переписывая это неравенство с помощью теоремы о среднем, для любых $t \in [0, T)$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ получаем

$$\frac{u(t, x_2) - u(t, x_1)}{x_2 - x_1} \leq K_0. \tag{3.7}$$

Заметим теперь, что неравенство (3.7) имеет смысл и при $t \geq T$: пусть $x(t)$ – кривая разрыва, $x_0 = x(t_0)$, $x_2 \to x_0 + 0$, $x_1 \to x_0 - 0$. Тогда, согласно введенным ранее обозначениям, $u(t_0, x_2) \to u_R$, $u(t_0, x_1) \to u_L$, и, переписывая (3.7) в виде $u(t, x_2) \leq K_0(x_2 - x_1) + u(t, x_1)$ получаем неравенство

$$u_R \leq u_L. \tag{3.8}$$

Если же теперь $F''(u) \leq 0$, то аналогичным рассуждением получаем, что $u_R \geq u_L$. Отсюда вытекает следующее определение.

Определение 3.1.4 *Пусть $F \in C^3$, $g \in C^2$, $F''(u) \neq 0$, $u(t, x)$ – обобщенное решение (3.1), $x(t)$ – кривая разрыва. Тогда разрыв является допустимым, если выполнено следующее неравенство:*

$$F''(u)(u_R - u_L) \leq 0. \tag{3.9}$$

„Физическое“ обоснование уловия допустимости разрыва (3.9) следующее: из этого неравенства следует, что в любой точке $x_0 = x(t_0)$ линии разрыва имеет место неравенство

$$F'(u_L) < \frac{F(u_R) - F(u_L)}{u_R - u_L} < F'(u_L),$$

и, в силу условия Рэнкина-Гюгонио (3.4) получаем, что

$$F'(u_L) < \dot{x}(t) < F'(u_R),$$

т.е. с ростом t характеристики подходят к линии разрыва, а не отходят от нее. Тем самым, если условие (3.9) выполнено, то линия разрыва возникает естественно, а не является „навязанной“.

На случай невыпуклой функции F условие допустимости разрыва можно обобщить следующим образом

Условие 3.1.1 (Условие энтропии.) *Если $u_L < u_R$, то график функции $F(u)$ на отрезке $[u_L, u_R]$ не ниже хорды, соединяющей точки $(u_L, F(u_L))$ и $(u_R, F(u_R))$. Если $u_L > u_R$, то график функции $F(u)$ на отрезке $[u_R, u_L]$ не выше хорды, соединяющей точки $(u_L, F(u_L))$ и $(u_R, F(u_R))$.*

3.1.4 Энергетические оценки.

Условие 3.1.1 названо условием энтропии в связи с тем, что оно характеризует необратимость природных процессов, описываемых задачей Коши (3.1). Дадим еще одну, более наглядную, интерпретацию этой необратимости. Для этого введем полную кинетическую энергию системы

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(t,x)dx.$$

Пусть $g(x) \in C^2(\mathbb{R})$ – финитная функция. Тогда на $[0,T)$, $T > 0$, существует классическое и финитное по x при фиксированном t решение $u(t,x)$ задачи (3.1). Далее будем считать, что $u(t,x)$ – финитна по x при всех $t \geq 0$, откуда следует, что $E(t) < +\infty$.

Утверждение 3.1.3 (Сохранение энергии на классическом решении.) *Пусть $t < T$, тогда $E(t) = E(0) = \mathrm{const}$.*

Доказательство. Действительно,

$$\frac{dE}{dt} = \int_{-\infty}^{+\infty} uu_t dx = -\int_{-\infty}^{+\infty} u(F(u))_x dx =$$

$$= -uF(u)|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} F(u)u_x dx = \int_{u(t,-\infty)}^{u(t,+\infty)} F(u)du = \int_0^0 F(u)du = 0,$$

откуда следует требуемое.

Утверждение 3.1.4 (Падение кинетической энергии на сильном разрыве.) *Пусть $u(t,x)$ – обобщенное решение задачи Коши (3.1) в смысле интегрального тождества, удовлетворяющее условию энтропии 3.1.1, с одной линией сильного разрыва $x = x(t)$. Тогда скорость убывания кинетической энергии $E(t)$ на этом решении в каждый момент времени $t = t_0$ равна площади $S(t_0)$, ограниченной графиком функции $F(u)$ на отрезке $[u_L, u_R]$ (или $[u_R, u_L]$) и хордой, соединяющей точки $(u_L, F(u_L))$ и $(u_R, F(u_R))$ на этом графике:*

$$\frac{dE}{dt}(t_0) = -S(t_0).$$

Доказательство. Пусть для определенности $u_L < u_R$, тогда в силу условия энтропии имеем

$$S(t_0) = \int\limits_{u_L}^{u_R} F(u)du - \frac{F(u_R) + F(u_L)}{2}(u_R - u_L).$$

С другой стороны,

$$\frac{d}{dt}E(t_0) = \frac{d}{dt}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}u^2(t,x)dx = \frac{d}{dt}\left(\int\limits_{-\infty}^{x(t)} \frac{1}{2}u^2(t,x)dx + \int\limits_{x(t)}^{+\infty} \frac{1}{2}u^2(t,x)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2}u_L^2\dot{x}(t_0) + \int\limits_{-\infty}^{x(t_0)} uu_t dx - \frac{1}{2}u_R^2\dot{x}(t_0) + \int\limits_{x(t_0)}^{+\infty} uu_t dx =$$

$$= \frac{u_L^2 - u_R^2}{2}\dot{x}(t_0) - \int\limits_{-\infty}^{x(t_0)} u(F(u))_x dx - \int\limits_{x(t_0)}^{+\infty} u(F(u))_x dx =$$

$$= \frac{u_L^2 - u_R^2}{2}\dot{x}(t_0) - uF(u)|_{x=-\infty}^{x=x(t_0)} + \int\limits_{-\infty}^{x(t_0)} F(u)u_x dx - uF(u)|_{x=x(t_0)}^{x=+\infty} + \int\limits_{x(t_0)}^{+\infty} F(u)u_x dx.$$

В силу условия Рэнкина-Гюгонио (3.4) и с учетом $u(t,\pm\infty) = 0$ имеем

$$\frac{dE}{dt} = \frac{u_L^2 - u_R^2}{2}\frac{F(u_R) - F(u_L)}{u_R - u_L} - u_L F(u_L) + \int\limits_{0}^{u_L} F(u)du + u_R F(u_R) + \int\limits_{u_R}^{u_L} F(u)du = -S(t_0),$$

что и требовалось доказать.

Таким образом, $E(t) = E(0)$ до возникновения ударной волны, а затем $\frac{dE}{dt} < 0$, т.е. кинетическая энергия рассеивается (частично она переходит в тепловую). Следовательно, эволюция обобщенных решений с ударными волнами связана с убыванием кинетической энергии, что влечет за собой необратимость физических процессов, моделируемых уравнением (3.1).

3.1.5 Обобщенное решение по Кружкову.

Условие Рэнкина-Гюгонио и условие энтропии имеют смысл только для кусочно-гладких функций $u(t,x)$ – иначе неясно, что такое односторонние пределы и линия разрыва. Однако, равенство (3.2) имеет смысл для гораздо более широкого класса функций. Обобщение понятия энтропийного решения (т.е. интегрального решения, удовлетворяющего условию энтропии 3.1.1) введено Кружковым:

Определение 3.1.5 *Ограниченная измеримая в полосе $\Pi_T = [0, T) \times \mathbb{R}$ функция $u(t, x)$ называется обобщенным энтропийным решением по Кружкову задачи (3.1), если:*
1. Для любого вещественного k и для любой пробной функции $\phi(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$ такой, что $\phi(t, x) \geq 0$ верно

$$\int\limits_{\Pi_T} \left(|u(t,x) - k|\phi_t + \operatorname{sign}(u(t,x) - k)(F(u(t,x)) - F(k))\phi_x\right) dxdt \geq 0 \qquad (3.10)$$

2. Для любых $a, b \in \mathbb{R}$ таких, что $a < b$ верно

$$\lim_{t \to 0+0} \int\limits_a^b |u(t,x) - g(x)| dx = 0. \qquad (3.11)$$

Теорема 3.1.2 *Обобщенное энтропийное решение по Кружкову задачи (3.1) существует и единственно для всех начальных функций $g(x) \in L^\infty(\mathbb{R})$.*

Теорема 3.1.3 *Обобщенное энтропийное решение по Кружкову задачи (3.1) является интегральным решением задачи (3.1).*

Доказательство. Пусть сначала $k > \sup\limits_{\Pi_T} u(t, x)$. Т.к. $k_t + (F(k))_x = 0$, то для любой пробной функции $\phi(t, x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $\phi(t, x) \geq 0$, $\phi(0, x) = 0$ верно

$$\int\limits_{\Pi_T} (k\phi_t + F(k)\phi_x) dxdt = 0.$$

Отсюда и из (3.10) имеем

$$\int\limits_{\Pi_T} ((k - u)\phi_t + (F(k) - F(u))\phi_x) dxdt \geq 0,$$

откуда

$$\int\limits_{\Pi_T} (u\phi_t + F(u)\phi_x) dxdt \leq 0.$$

Аналогично, выбирая $k < \inf\limits_{\Pi_T} u(t,x)$, получаем

$$\int\limits_{\Pi_T} (u\phi_t + F(u)\phi_x)dxdt \geq 0.$$

Отсюда для всех пробных функций $\phi(t,x) \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $\phi(t,x) \geq 0$, $\phi(0,x) = 0$ имеем

$$\int\limits_{\Pi_T} (u\phi_t + F(u)\phi_x)dxdt = 0. \tag{3.12}$$

Заметим, что для любой функции $\phi \in C_0^\infty(\Pi_T)$ найдутся функции $\phi_1, \phi_2 \in C_0^\infty(\Pi_T)$ такие, что $\phi_j \geq 0$ и $\phi(t,x) = \phi_1(t,x) - \phi_2(t,x)$. Отсюда для любой функции $\phi \in C_0^\infty(\Pi_T)$, $\phi(0,x) = 0$ верно (3.12). Пусть теперь $\phi(0,x) \neq 0$, тогда в силу требования (3.11)

$$\int\limits_{\Pi_T} (u\phi_t + F(u)\phi_x)dxdt = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} u(0,x)\phi(0,x)dx = -\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g(x)\phi(0,x)dx,$$

откуда следует доказываемое.

Утверждение 3.1.5 *Пусть $u(t,x) \in KC^1(\Pi_T)$ – обобщенное энтропийное решение по Кружкову. Тогда на любой линии разрыва выполнено условие допустимости разрыва 3.1.1.*

Литература.

Л.К.Эванс, „Уравнения с частными производными", §3.3.1

А.Ю.Горицкий, С.Н.Кружков, Г.А.Чечкин, „Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка: обобщеные решения, ударные волны, центрированные волны разряжения (краткое учебное пособие)"

3.2 Введение в теорию обобщенных функций (распределений).

3.2.1 Пробные функции и их свойства.

Пусть $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ – открытое множество.

Определение 3.2.1 *Пусть $u \in C(\Omega)$. Носителем функции $u(x)$ называется множество $\operatorname{supp} u$ – замыкание в Ω множества $\{x \in \Omega |\ u(x) \neq 0\}$.*

Введем также некоторые обозначения для функциональных пространств.

Обозначение 3.2.1 *Пусть* $C_0^k(\Omega)$ *– множество функций* $u(x) \in C^k(\Omega)$ *таких, что* $\operatorname{supp} u$ *– компакт. Пусть также*

$$C^\infty(\Omega) = \bigcap_{k=0}^{+\infty} C^k(\Omega),$$

$C_0^\infty(\Omega)$ *– множество функций* $u(x) \in C^\infty(\Omega)$ *таких, что* $\operatorname{supp} u$ *– компакт.*

Если продолжить функцию $u(x) \in C_0^k(\Omega)$ на $\mathbb{R}^n$, положив $u(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$, то мы получим функцию из $C_0^k(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, пространство $C_0^k(\Omega)$ можно рассматривать как подпространство $C_0^k(\mathbb{R}^n)$, расширяющееся вместе с Ω.

Лемма 3.2.1 (Корректность определения C_0^∞) *Существует функция* $\phi_0(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ *такая, что* $\phi_0(x) \geq 0$ *и* $\phi_0(0) > 0$.

Доказательство. Положим

$$f(t) = \begin{cases} \exp(1 - \frac{1}{t}), \ t > 0 \\ 0, \ t < 0 \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Выберем $\phi_0(x) = f(1 - |x|^2)$. Тогда $\phi_0(x)$ – искомая.

Определение 3.2.2 *Пространство* $C_0^\infty(\Omega)$ *обычно нахывают пространством пробных функций на* Ω, *а функции из этого пространства – пробными.*

Теорема 3.2.1 *Если* $f(x),\ g(x) \in C(\Omega)$ *и для любой функции* $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ *имеет место равенство*

$$\int_\Omega f(x)\phi(x)dx = \int_\Omega g(x)\phi(x)dx, \tag{3.13}$$

то $f(x) = g(x)$.

Доказательство. Рассмотрим $h(x) = f(x) - g(x)$. Тогда

$$\forall \phi(x) \in C_0^\infty(\Omega): \ \int_\Omega h(x)\phi(x)dx = 0. \tag{3.14}$$

Пусть $h(x^0) \neq 0$, $x^0 \in (\Omega)$. Без ограничения общности можно считать, что $h(x^0) > 0$. Так как функция $h(x) \in C(\Omega)$, то найдется содержащаяся в Ω окрестность

U точки x^0 такая, что $\forall x \in U$: $h(x) > \frac{1}{2}h(x^0)$. Возьмем функцию $\phi_1(x) = \phi_0(\frac{x-x^0}{M})$, где функция $\phi_0(x)$ определена в лемме 3.2.1, $M > 0$ выбрано так, что $\operatorname{supp}\phi_1 \subset U$. Тогда функция $h(x)\phi_1(x)$ непрерывна, имеет постоянный знак и $h(x^0)\phi_1(x^0) = h(x^0)$. Значит, найдется окрестность $U_1 \subset U$ точки x^0 такая, что $h(x)\phi_1(x) > \frac{1}{2}h(x^0)$ $\forall x \in U_1$. Но отсюда следует, что

$$\int_\Omega h(x)\phi_1(x)dx \geq \int_{U_1} h(x)\phi_1(x)dx > \frac{1}{2}h(x^0)\operatorname{mes}(U_1) > 0,$$

что противоречит (3.14). Таким образом, $h(x) = 0$.

Пусть теперь $u(x)$, $v(x) \in C(\mathbb{R}^n)$, хотя бы одна из функций $u(x)$, $v(x)$ имеет компактный носитель.

Определение 3.2.3 *Сверткой функций $u(x)$ и $v(x)$ называется функция*

$$(u * v)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} u(x-y)v(y)dy. \tag{3.15}$$

Нетрудно видеть, что функция $u * v$ непрерывна. Кроме того, выбирая $x - y$ в качестве новой переменной, получим

$$(u * v)(x) = (v * u)(x). \tag{3.16}$$

Утверждение 3.2.1 *Равенство (3.15) эквивалентно равенству*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u * v)(x)\phi(x)dx = \iint\limits_{\mathbb{R}^n_y \times \mathbb{R}^n_x} u(x)v(y)\phi(x+y)dxdy \ \forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{3.17}$$

Доказательство. Действительно, с помощью замены переменной нетрудно видеть, что из (3.15) следует (3.17). Обратное верно по теореме 3.2.1.

Следствие 3.2.1 *Равенство (3.16) следует из коммутативности сложения в $\mathbb{R}^n$.*

Следствие 3.2.2 *Из ассоциативности сложения следует, что*

$$(u * v) * w = u * (v * w). \tag{3.18}$$

Если, помимо наложенного выше требования на компактность носителя, верно $u(x) \in C^1$, $v(x) \in C^0$, то, дифференцируя равенство (3.15) по параметру, получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(u * v) = (\frac{\partial}{\partial x_i}u) * v.$$

Отсюда и из (3.16) следует, что если $u \in C^j$, $v \in C^k$, то $u * v \in C^{j+k}$, и

$$\partial_x^{\alpha+\beta}(u * v) = (\partial_x^\alpha u) * (\partial_x^\beta v),\ |\alpha| \leq j,\ |\beta| \leq k. \tag{3.19}$$

Можно доказать, что $u * v \in C^0$, если $u \in C_0^0$, $v \in L_{1,loc}$. Более того, оказывается, что имеет место следующая теорема.

Теорема 3.2.2 *Если $u \in C_0^j(\mathbb{R}^n)$, то $u * v \in C^j(\mathbb{R}^n)$ при $v \in L_{1,loc}$ и $u * v \in C^{j+k}(\mathbb{R}^n)$ при $v \in C^k(\mathbb{R}^n)$.*

Теорема 3.2.3 (О регуляризации.) *Пусть $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi(x) \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x)dx = 1$. Если $u \in C_0^j(\mathbb{R}^n)$, то функция $u_\phi = u * \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. При этом при $\operatorname{supp}\phi \to \{0\}$ верно*

$$\forall \alpha \in (\mathbb{N} \cup \{0\})^n, |\alpha| \leq j:\ \sup |\partial_x^\alpha u - \partial_x^\alpha u_\phi| \to 0. \tag{3.20}$$

Если $v \in L_p(\mathbb{R}^n)$, то $v_\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $v_\phi \to v$ в L_p при $1 \leq p < \infty$.

Доказательство. В силу (3.19) и теоремы 3.2.2 достаточно доказать (3.20) при $\alpha = 0$. Пусть $\operatorname{supp}\phi$ лежит в шаре $|y| < \delta$. Тогда

$$|u(x) - u_\phi(x)| = |\int\limits_{\mathbb{R}^n} (u(x) - u(x-y))\phi(y)dy| \leq \sup_{|y|<\delta} |u(x) - u(x-y)|,$$

и правая часть стремится к нулю вместе с δ равномерно по x, так как функция $u(x)$ равномерно непрерывна как непрерывная на компактном множестве. Отсюда следует (3.20). Так как $||v_\phi||_{L_p} \leq ||v||_{L_p}$ и C_0^0 плотно в L_p, отсюда сразу следует второе утверждение теоремы.

Следствие 3.2.3 *Если $f, g \in L_{1,loc}(\Omega)$ и для всех пробных функций $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ выполнено (3.13), то $f(x) = g(x)$ п.в..*

Теорема 3.2.4 (Построение срезающей функции.) *Для любого открытого множества $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и для любого компактного подмножества $K \subset \Omega$ найдется функция $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ такая, что $0 \leq \phi \leq 1$ и $\phi = 1$ в некоторой окрестности K.*

Доказательство. Т.к. K – компакт, Ω – открытое множество, то найдется достаточно малое $\varepsilon > 0$ такое, что $\forall x \in K$, $\forall y \in (\mathbb{R}^n \setminus \Omega)$ верно неравенство $|x - y| \geq 4\varepsilon$. Пусть $v(x)$ – характеристическая функция множества $K_{2\varepsilon} = \{y|\ \exists x \in K:\ |x - y| < 2\varepsilon\}$. По лемме 3.2.1 найдется неотрицательная функция

$\chi \in C_0^\infty(B)$, где B – единичный шар, такая, что $\int_{\mathbb{R}^n} \chi(x)dx = 1$. Тогда функция $\chi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\chi(\frac{x}{\varepsilon})$ имеет носитель в шаре $\{|x| < \varepsilon\}$ и $\int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x)dx = 1$. Положим $\phi(x) = (v * \chi_\varepsilon)(x)$. В силу теоремы о регуляризации $\phi(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Заметим, что $\operatorname{supp}(u * v) \subseteq \{x + y|\ x \in \operatorname{supp} u,\ y \in \operatorname{supp} v\}$. Отсюда $\phi(x) \in C_0^\infty(K_{3\varepsilon})$ и функция $1 - \phi(x) = (1 - v) * \chi_\varepsilon$ совпадает с нулем на K_ε. Кроме того,

$$|\phi(x)| = |(v*\chi_\varepsilon)(x)| = |\int_{\mathbb{R}^n} v(y)\chi_\varepsilon(x-y)dy| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |v(y)|\chi_\varepsilon(x-y)dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} \chi_\varepsilon(x-y)dy = 1.$$

Отсюда и из неотрицательности функций $v(x)$, $\chi_\varepsilon(x)$ следует, что $0 \leq \phi(x) \leq 1$.

Замечание 3.2.1 *Заметим, что* $|\partial^\alpha \phi| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \chi_\varepsilon| dx = \varepsilon^{-|\alpha|} \int_{\mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \chi| dx$, *т.е.* $|\partial^\alpha \phi| \leq C_\alpha \varepsilon^{-|\alpha|}$, *где* C_α *– константа, зависящая только от* α *и* n *и не зависящая от выбора множества* Ω *и компакта* K.

Теорема 3.2.5 (Разбиение в сумму.) *Пусть* $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ *– открытые множества в* $\mathbb{R}^n$, $\phi(x) \in C_0^\infty(\cup_{j=1}^k \Omega_j)$. *Тогда найдутся функции* $\phi_j(x) \in C_0^\infty(\Omega_j)$, $j = 1, \ldots, k$ *такие, что* $\phi = \sum_{j=1}^k \phi_j$. *При этом если* $\phi \geq 0$, *то можно выбрать все* $\phi_j \geq 0$.

Доказательство. Т.к. носитель функции $\phi(x)$ – компакт, содержащийся в $\cup_{j=1}^k \Omega_j$, то найдутся компактные множества $K_1, \ldots, K_k$ такие, что $K_j \subset \Omega_j$ и $\operatorname{supp} \phi \subseteq \cup_{j=1}^k K_j$. Далее, по теореме 3.2.4 найдутся функции $\psi_j \in C_0^\infty(\Omega_j)$ такие, что $0 \leq \psi_j \leq 1$ и $\psi_j = 1$ на K_j. Тогда функции $\phi_1 = \phi\psi_1$, $\phi_2 = \phi(1 - \psi_1)\psi_2$, $\ldots$, $\phi_k = \phi(\Pi_{j=1}^{k-1}(1 - \psi_j))\psi_k$ обладают требуемым свойством, т.к. в любой точке множества $K = \cup_{j=1}^k K_j$ либо $\phi(x) = 0$, либо найдется $j = 1, \ldots, k$ такое, что $1 - \psi_j = 0$, а кроме того, $\operatorname{supp} \phi \subseteq K$.

Из теорем 3.2.4 и 3.2.5 вытекает следующее полезное утверждение.

Теорема 3.2.6 (Разбиение единицы.) *Пусть* $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ *– открытые множества в* $\mathbb{R}^n$, K *– компактное подмножество* $\cup_{j=1}^k \Omega_j$. *Тогда найдутся функции* $\phi_j(x) \in C_0^\infty(\Omega_j)$ *такие, что* $\phi_j(x) \geq 0$ *и* $\sum_{j=1}^k \phi_j(x) \leq 1$, *причем в некоторой окрестности* K *верно* $\sum_{j=1}^k \phi_j(x) = 1$.

Про функции $\phi_j(x)$ в таком случае говорят, что они образуют *разбиение единицы* на K, подчиненное покрытию компакта K множествами Ω_j.

Упражнения к пункту 1.

1. Доказать, что если $u \in C_0^0(\mathbb{R}^n)$, $v \in C(\mathbb{R}^n)$, то $u * v \in C(\mathbb{R}^n)$.
2. Доказать равенство (3.18).
3. Доказать следствие 3.2.3.
4. Вывести теорему 3.2.6 как следствие из теорем 3.2.4 и 3.2.5.

3.2.2 Определение и основные свойства обобщенных функций.

Пусть Ω – открытое подмножество $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим функционал на $C_0^\infty(\Omega)$ следующего вида:

$$L(\phi) = \sum_\alpha \int_\Omega f_\alpha(x) \partial^\alpha \phi(x) dx, \qquad (3.21)$$

где $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$, функции $f_\alpha(x) \in C(\Omega)$ заданы, и число слагаемых в сумме конечно. Как мы уже видели раньше, выражения вида (3.21) возникают при записи уравнений с частными производными в форме интегральных тождеств. Заметим, что если $L(\phi)$ удовлетворяет (3.21), то

$$|L(\phi)| \leq \sum_\alpha \sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha \phi(x)| \int_\Omega |f_\alpha(x)| dx.$$

Определение 3.2.4 *Обобщенная функция (распределение) u на Ω – это линейный функционал на $C_0^\infty(\Omega)$ такой, что для любого компактного подмножества $K \subset \Omega$ найдутся константы C, k такие, что*

$$|u(\phi)| \leq C \sum_{|\alpha|\leq k} \sup_{x\in\Omega} |\partial^\alpha(\phi)|, \ \phi \in C_0^\infty(K). \qquad (3.22)$$

Множество всех распределений на Ω будем обозначать $D'(\Omega)$. Если в (3.22) можно использовать одно и то же k для всех компактов K, то говорят, что распределение u имеет порядок не выше k.

Таким образом, распределение $u \in D'(\Omega)$ – это отображение $u\colon C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{R}$ (вообще говоря, $u\colon C_0^\infty(\Omega) \to \mathbb{C}$) такое, что для любых $a, b \in \mathbb{R}$, $\phi, \psi \in C_0^\infty(\Omega)$ верно $u(a\phi + b\psi) = au(\phi) + bu(\psi)$, а также выполнено условие (3.22). Заметим, что равенство (3.21) определяет распределение порядка не выше k, если $f_\alpha = 0$ при $|\alpha| > k$.

Пример: для любого $x^0 \in \Omega$ и для любого мультииндекса α формула $u(\phi) = \partial^\alpha \phi(x^0)$ определяет распределение порядка ровно $|\alpha|$. То, что порядок этого распределения не меньше $|\alpha|$, следует из того, что если взять $\psi \in C_0^\infty(\Omega)$ такую, что $\psi(0) = 1$, и положить $\phi_\delta(x) = (x - x^0)^\alpha \psi(\frac{x-x^0}{\delta})$, то $u(\phi_\delta) = \alpha!$ и $\sup |\partial^\beta \phi_\delta| \leq C\delta^{|\alpha|-|\beta|} \to 0$ при $\delta \to 0$, $|\beta| < |\alpha|$.

Определим сходимость в пространстве пробных функций следующим образом.

Определение 3.2.5 *Будем говорить, что $\phi_j \to \phi$ в $D(\Omega)$, $j \to +\infty$, если $\phi_j(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ $\forall j$, $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, существует компакт $K \subset \Omega$ такой, что $\operatorname{supp} \phi_j \subseteq K$ $\forall j$ и $\sup\limits_{x\in K} |\partial^\alpha(\phi_j - \phi)| \to 0$ при $j \to +\infty$.*

Оказывается, что эквивалентным условию (3.22) является условие *секвенциальной непрерывности.*

Теорема 3.2.7 (Секвенциальная непрерывность.) *Линейный функционал u является распределением на Ω тогда и только тогда, когда для любой последовательности ϕ_j, сходящейся к нулю в $D(\Omega)$, верно $u(\phi_j) \to 0$ при $j \to +\infty$.*

Доказательство. Необходимость очевидным образом следует из определения сходимости в $D(\Omega)$ и условия (3.22). Докажем достаточность. Предположим противное. Пусть найдется компакт $K \subset \Omega$ такой, что (3.22) не выполнено ни при каких $C,\ k$. Возьмем $C = k = j$, тогда найдется $\phi_j \in C_0^\infty(K)$ такая, что

$$|u(\phi_j)| > j \sum_{|\alpha|<j} |\partial^\alpha \phi_j|.$$

Заметим, что это неравенство не нарушится при замене ϕ_j на $\lambda\phi_j$. Таким образом, можно считать, что $u(\phi_j) = 1$. Но тогда $|\partial^\alpha \phi_j| \leq \frac{1}{j}$ при $j \geq |\alpha|$, откуда $\phi_j \to 0$ в $D(\Omega)$ при $j \to +\infty$. Но $u(\phi_j) = 1 \not\to 0$ при $j \to +\infty$. Противоречие.

Если $Y \subset \Omega$, $u \in D'(\Omega)$, то можно сузить (ограничить) обобщенную функцию u до распределения на Y, положив $u|_Y(\phi) = u(\phi)$, $\phi \in C_0^\infty(Y)$.

Теорема 3.2.8 *Если $u \in D'(\Omega)$, и для любой точки $x^0 \in \Omega$ существует окрестность U этой точки такая, что $u|_U = 0$, то $u = 0$.*

Доказательство. Пусть $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$. По лемме об открытом покрытии найдется конечное число открытых окрестностей U_j точек Ω, удовлетворяющих условиям теоремы и таких, что $\operatorname{supp}\phi \subset \cup_j U_J$. Отсюда по теореме 3.2.5 найдутся $\phi_j \in C_0^\infty(U_j)$ такие, что $\phi = \sum_j \phi_j$. Но так как $u(\phi_j) = 0$, то $u(\phi) = \sum_j u(\phi_j) = 0$.

Определение 3.2.6 *Носитель* $\operatorname{supp} u$ *обобщенной функции $u \in D'(\Omega)$ – это множество всех точек Ω таких, что у них нет ни одной открытой окрестности, ограничение на которую для распределения u равно нулю.*

Заметим, что для любой функции $v \in C(\Omega)$ ей можно сопоставить распределение u по правилу $u(\phi) = \int_\Omega v(x)\phi(x)dx$. В дальнейшем мы будем отождествлять такие распределения с соответствующими непрерывными функциями.

Определение 3.2.7 *Носитель сингулярности распределения u – множество* $\operatorname{sing\,supp} u$ *– множество всех точек Ω, у которых нет ни одной открытой окрестности, ограничение на которую распределения u является бесконечно гладкой функцией.*

Заметим теперь, что $D'(\Omega)$ – векторное пространство с естественно определенными сложением и умножением на число. Зададим сходимость в $D'(\Omega)$ следующим образом:

Определение 3.2.8 *Будем говорить, что последовательность обобщенных функций $u_j \in D'(\Omega)$ сходится к $u \in D'(\Omega)$ при $j \to +\infty$ (и обозначать это $u_j \xrightarrow{D'} u$, $j \to \infty$), если для любой пробной функции $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$ верно соотношение $\lim\limits_{j\to\infty} u_j(\phi) = u(\phi)$.*

<u>Примеры.</u>

1. $u_n(\phi) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{x}{n}\phi(x)dx \xrightarrow{D'} 0,\ n \to \infty$.

Действительно, зафиксируем $\phi \in C_0^\infty((-1;1))$. Тогда

$$|u_n(\phi)| = \frac{1}{n}|\int\limits_{-1}^{1} x\phi(x)dx| = \frac{C}{n} \to 0,\ n \to \infty.$$

Таким образом, $\lim\limits_{n\to\infty} u_n(\phi) = u(\phi) = 0$, откуда $u(\phi) = 0$.

2. $u_n(\phi) = \int\limits_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} \frac{n}{2}\phi(x)dx \xrightarrow{D'} \delta_0(\phi),\ n \to \infty$, где $\delta_0(\phi) = \phi(0)$.

<u>Упражнения к пункту 2.</u>

1. Проверить сходимость в примере 2. Указание: воспользоваться интегральной теоремой о среднем.
2. Сопоставим функции $v(x) = |x|$ обобщенную функцию $u \in D'((-1;1))$. Найти $\operatorname{supp} u$ и $\operatorname{sing\,supp} u$.
3. Найти предел последовательности функций $u_n(x)$ в $D'(\mathbb{R})$, где

$$u_n = \begin{cases} -1,\ x < -\frac{1}{n}, \\ nx,\ x \in (-\frac{1}{n}; \frac{1}{n}), \\ 1,\ x > \frac{1}{n} \end{cases}$$

3.2.3 Дифференцирование распределений и умножение на гладкую функцию. Свертка с гладкой функцией.

Если $u \in C^1(\Omega)$, то, как легко видеть из формулы интегрирования по частям, для любой пробной функции $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ имеет место равенство

$$\int_\Omega (\partial_{x_k} u)(x)\phi(x)dx = -\int_\Omega u(x)(\partial_{x_k}\phi)(x)dx.$$

Если же $f \in C^\infty(\Omega)$, то, очевидно, для любой пробной функции $\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ функция $f(x)\phi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$, и верно равенство

$$\int_\Omega (fu)(x)\phi(x)dx = \int_\Omega u(x)(f\phi)(x)dx.$$

Поэтому, а также в силу указанной в предыдущем пункте связи между непрерывными функциями и распределениями, естественным является следующее определение.

Определение 3.2.9 *Для любой обобщенной функции $u \in D'(\Omega)$ положим*

$$(\partial^\alpha u)(\phi) = (-1)^{|\alpha|}u(\partial^\alpha \phi), \ \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Если $f \in C^\infty(\Omega)$, то положим

$$(fu)(\phi) = u(f\phi), \ \phi \in C_0^\infty(\Omega).$$

Пример. Функция

$$\theta(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

называется функцией Хевисайда. Ее производная в смысле $D'(\mathbb{R})$ равна

$$\theta'(\phi) = -\theta(\phi') = -\int_0^{+\infty} \phi'(x)dx = \phi(0) = \delta_0(\phi).$$

Теорема 3.2.9 (Дифференцирование кусочно-гладких функций.) *Пусть функция $u(x)$ определена на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in \Omega$, функция $u(x)$ дифференцируема при $x \in (\Omega \setminus \{x_0\})$. Если функция $v(x)$, равная $u'(x)$ при $x \neq x_0$, непрерывна на $\Omega \setminus \{x_0\}$ и интегрируема в некоторой окрестности x_0, то пределы $u(x_0 \pm 0)$ существуют, и в смысле обобщенных функций имеет место равенство*

$$u'(x) = v(x) + (u(x_0+0) - u(x_0-0))\delta_{x_0}.$$

Доказательство. Если $x_0 < y$ и $[x_0, y] \subset \Omega$, то $u(x) = u(y) - \int_x^y v(t)dt$, откуда следует существование предела $u(x_0+0)$. Аналогично доказывается существование $u(x_0-0)$. Далее,

$$u'(\phi) = -u(\phi') = \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(-\int\limits_{|x-x_0|>\varepsilon} u(x)\phi'(x)dx \right) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0+0} \left(u(x_0+\varepsilon)\phi(x_0+\varepsilon) - u(x_0-\varepsilon)\phi(x_0-\varepsilon) + \int\limits_{|x-x_0|>\varepsilon} v(x)\phi(x)dx \right).$$

Отсюда, так как $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \phi(x_0+\varepsilon) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0+0} \phi(x_0-\varepsilon) = \phi(x_0)$, получаем доказываемое.

Определение 3.2.10 *Сверткой $u * \phi$ распределения $u \in D'(\mathbb{R}^n)$ и пробной функции $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ называется функция $(u*\phi)(x) = u(\phi(x-\cdot))$, где правая часть обозначает результат применения u к функции $\phi(x-y)$ как функции от y.*

Если $u \in C(\mathbb{R}^n)$, то это определение, очевидно, совпадает с (3.15). Оказывается, что все свойства свертки сохраняют силу и для свертки распределения с пробной функцией. Более того, справедливы следующие теоремы (доказательства их мы приводить не будем):

Теорема 3.2.10 *Если $u \in D'(\Omega)$ и $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $u*\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, а также:*
1. $\operatorname{supp}(u*\phi) \subseteq \operatorname{supp} u + \operatorname{supp}\phi = \{x+y|\ x \in \operatorname{supp} u,\ y \in \operatorname{supp}\phi\}$.
2. $\partial^\alpha(u*\phi) = (\partial^\alpha u)*\phi = u*(\partial^\alpha\phi)$.

Теорема 3.2.11 *Если $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, $\phi, \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $(u*\phi)*\psi = u*(\phi*\psi)$.*

Теорема 3.2.12 *Пусть $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\phi \geq 0$, $\int_{\mathbb{R}^n}\phi(x)dx = 1$. Если $u \in D'(\mathbb{R}^n)$, то $u_\phi = u*\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $u_\phi \xrightarrow{D'} u$ при $\operatorname{supp}\phi \to \{0\}$.*

Упражнения к пункту 3.
1. Найти $x\delta_0(x)$.
2. Найти $\frac{d}{dx}(|x|)$ в $D'(\mathbb{R})$.
3. Найти $\delta_0 * \phi$, где $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Литература.

Л. Хермандер, „Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т.1: Теория распределений и анализ Фурье.“, гл.1, а также пп. 2.1, 2.2, 3.1, 4.1.

Глава 4

Дополнительные главы первого семестра.

4.1 Периодические решения системы ОДУ, близкой к линейной.

4.1.1 Отыскание периодических решений.

Лемма 4.1.1 *Пусть при* $t \in [0,p]$ *функция* $x(t)$ *– решение задачи* $\dot{x} = f(t,x)$, *где* f *и* $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ *непрерывны и* $f(t+p,x) = f(t,x)$. *Если* $x(p) = x(0)$, *то решение* $x(t)$ *продолжается на* $(-\infty,+\infty)$ *с периодом* p.

Доказательство. Так как $\dot{x}(p-0) = f(p,x(p)) = f(0,x(0)) = \dot{x}(0+0)$, то продолженная с периодом p функция $x(t) \in C^1(\mathbb{R})$. Она всюду удовлетворяет уравнению, так как для любого $k \in \mathbb{Z}$ имеет место равенство

$$\dot{x}(t+kp) = \dot{x}(t) = f(t,x(t)) = f(t+kp, x(t+kp)).$$

Лемма доказана.

Лемма 4.1.2 *Пусть* A *– квадратная матрица. Если для любого ее собственного значения* λ *верно*

$$\lambda \neq \frac{2\pi i k}{p},\ k \in \mathbb{Z} \tag{4.1}$$

то система

$$\dot{x} = Ax + f(t) \tag{4.2}$$

для каждой непрерывной функции $f(t)$ *с периодом* p *имеет единственное решение с периодом* p.

Доказательство. Пусть $v(t)$ – решение (4.2), $v(0) = 0$. Тогда общее решение (4.2) имеет вид $x(t) = e^{At}b + v(t)$, $b \in \mathbb{R}^n$. Для того, чтобы это решение имело период p, необходимо, чтобы $x(p) = x(0)$, т.е.

$$e^{Ap}b + v(p) = b + v(0),$$

откуда, т.к. $v(0) = 0$, получаем

$$(e^{Ap} - E)b = -v(p). \tag{4.3}$$

Из условия отсутствия резонанса (4.1) имеем $\det(e^{Ap} - E) \neq 0$, так как собственные значения матрицы e^{Ap} – это числа $e^{\lambda_j p} \neq 1$. Таким образом, система (4.3) имеет единственное решение, которому, согласно лемме 2.1, соответствует единственное периодическое решение $x(t)$ системы (4.2). Лемма доказана.

Теорема 4.1.1 *Пусть $f(t)$, $g(t, x, \mu)$ непрерывны при $x \in \mathbb{R}^n$, $(t, x) \in D$, $|\mu| < \mu_1$, имеют период p по t. Пусть также функция g является m раз непрерывно дифференцируемой по x, μ, $m > 1$. Пусть, кроме того, выполнено условие отсутствия резонанса (4.1) и решение $x^0(t)$ с периодом p уравнения (4.2) содержится в D. Тогда при всех достаточно малых $|\mu|$ система*

$$\dot{x} = Ax + f(t) + \mu g(t, x, \mu) \tag{4.4}$$

имеет решение периода p по t, стремящееся к $x^0(t)$ при $\mu \to 0$. Это решение единственно и принадлежит классу C^m по μ.

Доказательство. Пусть $x(t, b, \mu)$ – решение (4.4) с начальным условием $x(0, b, \mu) = b$. По лемме 2.1 оно имеет период p, если

$$x(p, b, \mu) - b = 0. \tag{4.5}$$

Докажем, что при малых μ найдется $b \in \mathbb{R}^n$ такое, что (4.5) выполнено. Действительно, функция $x(p, b, \mu) \in C^m$ по b, μ в силу следствия 1.1. При $\mu = 0$ уравнение (4.4) линейное, совпадает с (4.2), и уравнение (4.5) имеет вид (4.3). Далее, уравнение (4.3) в силу условия (4.1) имеет единственное решение b_*. Якобиан левой части (4.5) по координатам вектора b при $\mu = 0$ совпадает с $\det(e^{Ap} - E) \neq 0$. Отсюда по теореме о неявных функциях уравнение (4.5) имеет решение $b = b(\mu)$, стремящееся к b_* при $\mu \to 0$, оно единственно и $b(\mu) \in C^m$. Тогда решение $x(t, b(\mu), \mu) \in C^m$ по μ и в силу (4.5) и леммы 2.1 имеет период p. Теорема доказана.

Следствие 4.1.1 *Пусть выполнены условия теоремы 4.1.1. Тогда указанное периодическое решение имеет разложение по степеням μ:*

$$x(t, \mu) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \cdots + \mu^m v_m(t) + \bar{o}(\mu^m), \tag{4.6}$$

причем функции $v_i(t)$ имеют период p.

Доказательство. По теореме 4.1.1 функция $x(t, b(\mu), \mu) \in C^m$ по μ. Значит, имеет место (4.6). Так как $x(t, \mu)$ – периодическая функция по t с периодом p, то

$$0 = x(t+p, b, \mu) - x(t, b, \mu) = d_0 + d_1\mu + \cdots + d_m\mu^m + \bar{o}(\mu^m),$$

откуда $d_i = 0$. Осталось заметить, что $d_i = v_i(t+p) - v_i(t)$. Следствие доказано.

4.1.2 Вынужденные колебания автономной системы.

Рассмотрим систему ОДУ

$$\dot{x} = F(x) + \mu f(t),\ f(t+p) = f(t). \tag{4.7}$$

Пусть x^0 – положение равновесия при $\mu = 0$, т.е. $F(x^0) = 0$; μ – мало, $f(t) \in C(\mathbb{R})$, $F(x) \in C^{m+1}$ в окрестности x^0. Замена $x = x^0 + \mu y$ приводит (4.7) к виду $\mu\dot{y} = F(x^0 + \mu y) + \mu f(t)$. Так как $F(x^0) = 0$, то по формуле Тейлора $F(x^0 + \mu y) = \mu A y + r(\mu, y)$, где $A = \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)\Big|_{x=x^0}$, $r \in C^{m+1}$ по y, $r(\mu, y) = \mu^2 g(y, \mu)$ и задача (4.7) имеет вид $\dot{y} = Ay + f(t) + \mu g(y, \mu)$, $g \in C^m$. Если собственные значения матрицы A удовлетворяют условию (4.1), то по теореме 4.1.1 эта система при достаточно малых μ имеет единственное решение с периодом p.

Пример. Рассмотрим уравнение $\ddot{x} + 2\dot{x} + x^2 - 1 = \mu \sin t,\ x \in \mathbb{R}$. При $\mu = 0$ есть два положения равновесия: $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = -1$. Найдем периодическое решение, близкое к x_1^0. Замена $x = 1 + \mu y$ дает

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = \sin t - \mu y^2.$$

Здесь $p = 2\pi$, $\lambda = -1 \pm i \neq \frac{2\pi i k}{p}$. Значит, условие (4.1) выполнено, и согласно следствию 2.1 при малых μ имеем $y(t, \mu) = v_0(t) + \mu v_1(t) + \ldots$, $v_i(t)$ имеют период 2π. Подставляя, получаем

$$\ddot{v}_0 + 2\dot{v}_0 + 2v_0 = \sin t,$$

$$\ddot{v}_1 + 2\dot{v}_1 + 2v_1 = -v_0^2,$$

$$\ddot{v}_2 + 2\dot{v}_2 + 2v_2 = -2v_0 v_1,$$

и так далее. Для каждого из этих уравнений надо найти только частное решение, т.к. по теореме 4.1.1 решение с периодом 2π единственно. Отсюда $v_0 = a\cos t + b\sin t$, $a = -\frac{2}{5}$, $b = \frac{1}{5}$, т.е. $v_0 = -\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t$. Далее, $v_0^2 = \frac{1}{10} + \frac{3}{50}\cos 2t - \frac{2}{25}\sin 2t$, $v_1 = -\frac{1}{20} - \frac{1}{100}\cos 2t - \frac{1}{50}\sin 2t$ и так далее. Таким образом,

$$x(t, \mu) = 1 + \mu(-\frac{2}{5}\cos t + \frac{1}{5}\sin t) + \mu^2(-\frac{1}{20} - \frac{1}{100}\cos 2t - \frac{1}{50}\sin 2t) + \bar{o}(\mu^2).$$

Упражнения. 1. Найти следующий член в разложении $x(t,\mu)$.
2. Найти периодическое решение, близкое к $x_2^0 = -1$.

Литература:
А.Ф.Филиппов, „Введение в теорию дифференциальных уравнений“, §24

4.2 Задача Римана о распаде разрыва.

4.2.1 Автомодельные решения. Задача Римана для уравнения Хопфа.

Определение 4.2.1 *Задачей Римана (или задачей о распаде разрыва) называется задача о поиске обобщенного энтропийного решения $u(t,x)$ уравнения*

$$u_t + (F(u))_x = 0, \tag{4.8}$$

удовлетворяющего начальному условию

$$u|_{t=0} = \begin{cases} u_-, & x < 0, \\ u_+, & x > 0, \end{cases} \tag{4.9}$$

где u_- и u_+ – некоторые действительные числа.

Заметим, что уравнение (4.8) инвариантно относительно замены x на kx, t на kt, где $k > 0$. Кроме того, условие (4.9) также инвариантно относительно этого преобразования. Следовательно, в силу единственности энтропийного решения, при такой замене функция $u(t,x)$ переходит в себя: $u(t,x) = u(kt,kx)$ для всех $k > 0$. О единственности можно говорить, т.к. условие допустимости разрыва также инвариантно относительно такой замены независимых переменных.

Упражнение. Проверить инвариантность уравнения, начального условия и условия допустимости разрыва при указанной замене (провести подробные выкладки).

Таким образом, $u(t,x) = u(\frac{x}{t})$, $t > 0$. Решения такого вида называются автомодельными.

Пусть сначала $F(u) = \frac{u^2}{2}$, тогда (4.8) называется уравнением Хопфа. Опишем все его гладкие автомодельные решения. Подставляя $u(\frac{x}{t})$ в уравнение Хопфа

$$u_t + uu_x = 0, \tag{4.10}$$

имеем

$$-\frac{x}{t^2}u'(\frac{x}{t}) + \frac{1}{t}u(\frac{x}{t})u'(\frac{x}{t}) = \frac{1}{t}u'(\frac{x}{t})(u(\frac{x}{t}) - \frac{x}{t}) = 0,$$

откуда $u' = 0$ или $u(\frac{x}{t}) - \frac{x}{t} = 0$, т.е. $u = \mathrm{const}$ или $u(\frac{x}{t} = \frac{x}{t}$. Таким образом, все гладкие автомодельные решения уравнения Хопфа (4.10) – это константы и функция $\frac{x}{t}$. „Соединим“ эти решения так, чтобы функция $u(t,x)$ была кусочно-гладкой, удовлетворяла условию (4.9), условию Рэнкина-Гюгонио (3.3) и условию энтропии 3.1.1. В силу того, что $F''(u) = 1 > 0$, на разрывах имеем $u_L > u_R$. Далее, если $x(t)$ – разрыв между двумя областями Ω_1 и Ω_2, в каждой из которых $u(t,x) = u(\frac{x}{t})$, то из условия допустимости разрыва следует, что $x(t) = \xi t$, $\xi = \mathrm{const}$. Если $u|_{\Omega_1} = u_1$, $u|_{\Omega_2} = u_2$, то в силу условия Рэнкина-Гюгонио $\xi = \frac{u_1+u_2}{2}$. Если же $u|_{\Omega_1} = u_1$, $u|_{\Omega_2} = \frac{x}{t}$, то $\xi = \frac{u_1+\xi}{2}$, откуда $u_1 = \xi$ и функция $u(t,x)$ непрерывна. Из этих рассуждений следует, что если $u_- > u_+$, то

$$u(t,x) = \begin{cases} u_-, \ x < \frac{u_-+u_+}{2}t, \\ u_+, \ x > \frac{u_-+u_+}{2}t. \end{cases} \tag{4.11}$$

Если же $u_- < u_+$, то решение $u(t,x)$, определенное в (4.11), не удовлетворяет условию энтропии, и, с помощью автомодельного решения $\frac{x}{t}$ стыкуя u_- и u_+, получаем

$$u(t,x) = \begin{cases} u_-, \ x < u_-t, \\ \frac{x}{t}, \ u_-t < x < u_+t, \\ u_+, \ x > u_+t. \end{cases} \tag{4.12}$$

Решения вида (4.12) называют центрированными волнами разрежения.

4.2.2 Случай выпуклой функции F.

Рассмотрим теперь задачу Римана (4.8), (4.9) для случая произвольной выпуклой функции F. Для определенности будем считать, что $F''(u) > 0$. Как и в предыдущем параграфе, начнем с того, что найдем все автомодельные решения (4.8). Подставляя $u(t,x) = u(\frac{x}{t})$, получаем:

$$-\frac{x}{t^2}u' + \frac{1}{t}F'(u)u' = \frac{1}{t}u'(F'(u(\frac{x}{t})) - \frac{x}{t}) = 0.$$

Обозначив $G = (F')^{-1}$, получаем, что все автомодельные решения уравнения (4.8) – это $u = \mathrm{const}$ и $u = G(\frac{x}{t})$. Функция G существует, т.к. $F''(u) > 0$, а значит, $F'(u)$ – строго монотонная непрерывная функция. Далее, по аналогии с уравнением Хопфа, получаем:

Если $u_- > u_+$, то решение – ударная волна, полученная из условия Рэнкина-Гюгонио:

$$u(t,x) = \begin{cases} u_-, \ x < \frac{F(u_+)-F(u_-)}{u_+-u_-}t, \\ u_+, \ x > \frac{F(u_+)-F(u_-)}{u_+-u_-}t. \end{cases} \tag{4.13}$$

Если $u_- < u_+$, то вместо этого решения получаем центрированную волну разрежения:

$$u(t,x) = \begin{cases} u_-, \ x < F'(u_-)t, \\ G(\frac{x}{t}), \ F'(u_-)t < x < F'(u_+)t, \\ u_+, \ x > F'(u_+)t. \end{cases} \tag{4.14}$$

Заметим, что равенство (4.14) корректно определяет функцию $u(t,x)$ при $t > 0$, т.к. $F''(u) > 0$, а значит, $F'(u_-) < F'(u_+)$.

Замечание 4.2.1 *Нетрудно видеть, что выпуклость функции F важна только на отрезке $[u_-, u_+]$ (или $[u_+, u_-]$).*

Упражнение. Построить аналоги для (4.13), (4.14) в случае, когда $F''(u) < 0$.

4.2.3 Случай невыпуклой функции состояния.

В этом случае ограничимся описанием того, каким именно методом строятся решения задачи Римана, без строгого обоснования этого метода.

Определение 4.2.2 *Выпуклой вверх оболочкой функции $F(u)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ называется функция*

$$F^+(u) = \inf_{\tilde{F} \in \Phi^+} \tilde{F}(u), \ u \in [\alpha, \beta],$$

где Φ^+ – совокупность всех выпуклых вверх функций $\tilde{F}(u)$ таких, что $\tilde{F}(u) \geq F(u)$ $\forall u \in [\alpha, \beta]$.

Аналогично определяется выпуклая вниз оболочка функции $F(u)$:

Определение 4.2.3 *Выпуклой вниз оболочкой функции $F(u)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ называется функция*

$$F_+(u) = \sup_{\tilde{F} \in \Phi_+} \tilde{F}(u), \ u \in [\alpha, \beta],$$

где Φ_+ – совокупность всех выпуклых вниз функций $\tilde{F}(u)$ таких, что $\tilde{F}(u) \leq F(u)$ $\forall u \in [\alpha, \beta]$.

Замечание 4.2.2 *Если $F(u)$ – выпуклая вверх функция на $[\alpha, \beta]$, то $F^+(u) = F(u)$, а график функции $F_+(u)$ – отрезок, соединяющий точки $(\alpha, F(\alpha))$ и $(\beta, F(\beta))$.*

Для решения задачи Римана (4.8), (4.9) в случае $u_- < u_+$ построим $F_+(u)$ на $[u_-, u_+]$, а в случае $u_- > u_+$ построим $F^+(u)$ на $[u_+, u_-]$. График выпуклой оболочки состоит из выпуклых в соответствующую сторону кусков графика $F(u)$ и отрезков, соединяющих эти куски. Каждый такой отрезок будет соответствовать лучу разрыва (ударной волне) построенного решения между двумя гладкими автомодельными решениями вида $u(t,x) = G(\frac{x}{t})$, где $G(\xi)$ – функция, обратная к $\xi = F'(u)$.

Пример.

$$u_t + (u^3)_x = 0,\ u|_{t=0} = -\operatorname{sign} x. \tag{4.15}$$

В этом случае $F(u) = u^3$, $u_- = 1$, $u_+ = -1$, $u_- > u_+$ – значит, необходимо построить $F^+(u)$ на $[-1, 1]$. Для этого проведем касательную к графику $F(u)$ из точки $(1, 1)$. Для точки касания (u_0, u_0^3) имеем:

$$\frac{1 - u_0^3}{1 - u_0} = F'(u_0) = 3u_0^2,\ u_0 \neq 1,$$

откуда $u_0 = -\frac{1}{2}$. Таким образом,

$$F^+(u) = \begin{cases} u^3,\ u \le -\frac{1}{2}, \\ \frac{3}{4}u + \frac{1}{4},\ u \in [-\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Далее, функция $G(\xi)$ – обратная к $\xi = 3u^2$ на промежутке $[-1, -\frac{1}{2}]$, т.е. $G(\xi) = -\sqrt{\frac{\xi}{3}}$. Согласно сказанному выше, решение имеет вид

$$u(t,x) = \begin{cases} 1,\ x < \gamma_1 t, \\ -\sqrt{\frac{x}{3t}},\ \gamma_1 t < x < \gamma_2 t, \\ -1,\ \gamma_2 t < x. \end{cases}$$

Константы γ_1 и γ_2 найдем из условия Рэнкина-Гюгонио:

$$\gamma_1 = \frac{F(1) - F(-\sqrt{\frac{\gamma_1}{3}})}{1 + \sqrt{\frac{\gamma_1}{3}}} = 1 - \sqrt{\frac{\gamma_1}{3}} + \frac{\gamma_1}{3},$$

откуда $\gamma_1 = \frac{3}{4}$. Аналогично $\gamma_2 = 3$, и решение задачи Римана (4.15) имеет вид

$$u(t,x) = \begin{cases} 1,\ x < \frac{3}{4}t, \\ -\sqrt{\frac{x}{3t}},\ \frac{3}{4}t < x < 3t, \\ -1,\ 3t < x. \end{cases} \tag{4.16}$$

Упражнение. Проверить, что формула (4.16) задает энтропийное решение задачи Римана (4.15).

Литература.

А.Ю.Горицкий, С.Н.Кружков, Г.А.Чечкин, „Квазилинейные уравнения с частными производными первого порядка: обобщеные решения, ударные волны, центрированные волны разряжения (краткое учебное пособие)“

4.3 Решения почти всюду.

4.3.1 Формула Хопфа-Лакса.

Рассмотрим уравнение Гамильтона-Якоби специального вида

$$u_t + H(\nabla u) = 0 \tag{4.17}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = g(x),\ x \in \mathbb{R}^n. \tag{4.18}$$

Нашей целью явлеяется построение функции $u(t,x)$, удовлетворяющей уравнению (4.17) и начальным условиям (4.18) почти всюду. Будем предполагать, что $H(p)$ – выпуклая функция, $\lim\limits_{|p|\to\infty} \frac{H(p)}{|p|} = +\infty$, $H(p) \in C^3(\mathbb{R}^n)$, функция $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ – липшицева, т.е.

$$Lip(g) := \sup\{\frac{|g(x) - g(y)|}{|x-y|} \mid x, y \in \mathbb{R}^n,\ x \neq y\} < \infty.$$

Как было показано в разделе, посвященном уравнению Гамильтона-Якоби, гамильтониану H можно поставить в соответствие лагранжиан L по формуле $L(q) = H^*(q)$. Рассмотрим модифицированный функционал действия

$$I[w(\cdot)] = \int\limits_0^t L(\dot{w}(s))ds + g(w(0)).$$

Положим

$$u(t,x) = \inf\{\int\limits_0^t L(\dot{w}(s))ds + g(w(0)) \mid w(s) \in C^1,\ w(t) = x\}. \tag{4.19}$$

Попробуем доказать, что функция $u(t,x)$, определенная по формуле (4.19), удовлетворяет (4.17) и (4.18) почти всюду. Для этого сначала упростим формулу (4.19) следующим образом.

Теорема 4.3.1 (Формула Хопфа-Лакса для решения задачи минимизации.) *Если $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, то решение $u(t,x)$ задачи (4.19) задается формулой*

$$u(t,x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \{tL(\frac{x-y}{t}) + g(y)\}. \tag{4.20}$$

Доказательство. Пусть $y \in \mathbb{R}^n$ – фиксированное, $w(s) = y + \frac{s}{t}(x-y)$, тогда

$$u(t,x) \le I[w(\cdot)] = \int_0^t L(\dot{w}(s))ds + g(y) = tL(\frac{x-y}{t}) + g(y),$$

откуда

$$u(t,x) \le \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{tL(\frac{x-y}{t}) + g(y)\}.$$

В другую сторону, если $w(s) \in C^1$, $w(t) = x$, то в силу неравенства Йенсена

$$L\left(\frac{1}{t}\int_0^t \dot{w}(s)ds\right) \le \frac{1}{t}\int_0^t L(\dot{w}(s))ds,$$

и при $y = w(0)$ имеем

$$tL(\frac{x-y}{t}) + g(y) = tL\left(\frac{1}{t}\int_0^t \dot{w}(s)ds\right) + g(y) \le \int_0^t L(\dot{w}(s))ds + g(y) = I[w(\cdot)].$$

Следовательно,

$$\inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{tL(\frac{x-y}{t}) + g(y)\} \le u(t,x).$$

Отсюда следует, что

$$u(t,x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{tL(\frac{x-y}{t}) + g(y)\}.$$

Можно показать, что инфимум на самом деле достигается, т.е. имеет место (4.20). Теорема доказана.

Замечание 4.3.1 (Неравенство Йенсена.) *Пусть $L\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ – выпуклая функция, $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ – открытое ограниченное множество, $f\colon \Omega \to \mathbb{R}$ измерима. Тогда*

$$L\left(\frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega f(x)dx\right) \le \frac{1}{|\Omega|}\int_\Omega L(f(x))dx. \tag{4.21}$$

Доказательство. Так как функция L – выпуклая, то $\forall p, q \in \mathbb{R}$ найдется $r \in \mathbb{R}$ такое, что

$$L(q) \geq L(p) + r(q - p).$$

Возьмем $p = \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} f(x)dx$, $q = f(x)$. Тогда

$$L(f(x)) \geq L\left(\frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} f(y)dy\right) + r(f(x) - \frac{1}{|\Omega|} \int\limits_{\Omega} f(y)dy).$$

Проинтегрировав это неравенство по $x \in \Omega$, получим (4.21).

<u>Упражнение.</u> Довести до конца доказательство неравенства Йенсена (проделать интегрирование явно). Доказать аналог неравенства Йенсена для $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (именно это неравенство использовалось в доказательстве теоремы 4.3.1).

Изучим теперь свойства функции $u(t, x)$, заданной формулой (4.20).

Лемма 4.3.1 (Функциональное тождество.) *Для любых $x \in \mathbb{R}^n$, $0 \leq s < t$ верно равенство*

$$u(t, x) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} \{(t - s)L\left(\frac{x - y}{t - s}\right) + u(s, y)\}. \tag{4.22}$$

Доказательство. Пусть $y \in \mathbb{R}^n$, $0 < s < t$ фиксированы. Выберем z так, что

$$u(s, y) = sL(\frac{y - z}{s}) + g(z).$$

Так как L выпукла и имеет место равенство

$$\frac{x - z}{t} = (1 - \frac{s}{t})\frac{x - y}{t - s} + \frac{s}{t}\frac{y - z}{s},$$

то

$$L(\frac{x - z}{t}) \leq (1 - \frac{s}{t})L(\frac{x - y}{z - s}) + \frac{s}{t}L(\frac{y - z}{s}).$$

Таким образом,

$$u(t, x) \leq tL\left(\frac{x - z}{t}\right) + g(z) \leq (t - s)L\left(\frac{x - y}{t - s}\right) + sL\left(\frac{y - z}{s}\right) + g(z) =$$

$$= (t - s)L\left(\frac{x - y}{t - s}\right) + u(s, y).$$

Так как последнее неравенство верно для всех $y \in \mathbb{R}^n$, то

$$u(t, x) \leq \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{(t - s)L\left(\frac{x - y}{t - s}\right) + u(s, y)\}.$$

В другую сторону, положим $w \in \mathbb{R}^n$ таким, что

$$u(t,x) = tL\left(\frac{x-w}{t}\right) + g(w),$$

и $y = \frac{s}{t}x + (1-\frac{s}{t})w$. Тогда

$$\frac{x-y}{t-s} = \frac{x-w}{t} = \frac{y-w}{s},$$

откуда

$$(t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + u(s,y) \le (t-s)L\left(\frac{x-w}{t}\right) + sL\left(\frac{y-w}{s}\right) + g(w) =$$

$$= tL\left(\frac{x-w}{t}\right) + g(w) = u(t,x).$$

Следовательно,

$$u(t,x) \ge \inf_{y\in\mathbb{R}^n}\{(t-s)L\left(\frac{x-y}{t-s}\right) + u(s,y)\}.$$

Можно показать, что отображение $y \to u(s,y)$ непрерывно, а значит, минимум достигается.
Лемма доказана.

Можно показать, что функция $u(t,x)$, удовлетворяющая (4.20), липшицева, а значит, дифференцируема почти всюду. Доказательство этого факта можно найти у Эванса, §3.3.2.

Теорема 4.3.2 (Решение уравнения Гамильтона-Якоби.) *Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, $t > 0$, функция $u(t,x)$, заданная формулой (4.20), дифференцируема в точке (t,x). Тогда в этой точке имеет место равенство*

$$u_t(t,x) + H(\nabla u(t,x)) = 0.$$

Доказательство. Пусть $q \in \mathbb{R}^n$, $h > 0$ фиксированы. По лемме 4.3.1:

$$u(t+h, x+hq) = \min_{y\in\mathbb{R}^n}\{hL\left(\frac{x+hq-y}{h}\right) + u(t,y)\} \le hL(q) + u(t,x),$$

откуда

$$\frac{u(t+h,x+hq) - u(t,x)}{h} \le L(q),$$

и переходя к пределу при $h \to 0+0$, имеем

$$q \cdot \nabla u(t,x) + u_t(t,x) \le L(q).$$

Далее, так как $H = L^*$, то

$$H(\nabla u(t,x)) = \max_{q\in\mathbb{R}^n}\{q\cdot\nabla u(t,x) - L(q)\},$$

откуда и из предыдущего неравенства имеем

$$u_t(t,x) + H(\nabla u(t,x)) \le 0.$$

Выберем теперь z так, что

$$u(t,x) = tL\left(\frac{x-z}{t}\right) + g(z).$$

Пусть $h > 0$, $s = t-h$, $y = \frac{s}{t}x + (1-\frac{s}{t})z$. Тогда $\frac{x-z}{t} = \frac{y-z}{s}$, откуда

$$u(t,x) - u(s,y) \ge tL\left(\frac{x-z}{t}\right) + g(z) - \left(sL\left(\frac{y-z}{s}\right) + g(z)\right) = (t-s)L\left(\frac{x-z}{t}\right),$$

т.е.

$$\frac{u(t,x) - u(t-h,(1-\frac{h}{t})x + \frac{h}{t}z)}{h} \ge L\left(\frac{x-z}{t}\right),$$

и переходя к пределу при $h \to 0+0$, имеем

$$\frac{x-z}{t}\cdot\nabla u(t,x) + u_t(t,x) \ge L\left(\frac{x-z}{t}\right).$$

Следовательно,

$$u_t(t,x) + H(\nabla u(t,x)) = u_t(t,x) + \max_{q\in\mathbb{R}^n}\{q\cdot\nabla u(t,x) - L(q)\} \ge$$

$$\ge u_t(t,x) + \frac{x-z}{t}\cdot\nabla u(t,x) - L\left(\frac{x-z}{t}\right) \ge 0.$$

Отсюда и из противоположного неравенства следует требуемое.
Теорема доказана.

Упражнение. Показать, что функция $u(t,x)$, заданная формулой (4.20), удовлетворяет почти всюду условию (4.18).

4.3.2 Формула Лакса-Олейник.

Рассмотрим теперь скалярный закон сохранения

$$u_t + (F(u))_x = 0 \tag{4.23}$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = g(x), \ x \in \mathbb{R}. \tag{4.24}$$

Будем предполагать, что $F(0) = 0$, функция $F(u)$ равномерно выпукла и принадлежит классу C^3, т.е. $F''(u) \geq \theta > 0$ для некоторого вещественного θ. Пусть также $g(x)$ ограничена. Положим $h(x) = \int\limits_0^x g(y)dy$. Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения Гамильтона-Якоби:

$$w_t + F(w_x) = 0, \ w|_{t=0} = h(x). \tag{4.25}$$

Продифференцировав формально уравнения задачи (4.25) по x, получим

$$w_{xt} + (F(w_x))_x = 0, \ w_x|_{t=0} = g(x),$$

т.е. $u = w_x$ – решение задачи (4.23), (4.24). С другой стороны, из формулы Хопфа-Лакса имеем

$$w(t,x) = \min_{y\in\mathbb{R}}\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + h(y)\},$$

где $L = F^*$, причем $w(t,x)$ дифференцируема п.в.. Таким образом, функция

$$u(t,x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\min_{y\in\mathbb{R}}\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + h(y)\}\right) \tag{4.26}$$

определена для п.в. (t,x) и, с формальной точки зрения, является решением задачи (4.23), (4.24). Упростим формулу (4.26). Так как F равномерно выпукла, то F' строго возрастает и является сюрьекцией. Значит, существует обратная к $F'(u)$ функция, которую обозначим $G = (F')^{-1}$.

Теорема 4.3.3 (Формула Лакса-Олейник.) *Пусть функции F, g удовлетворяют указанным выше условиям. Тогда:*
1) Для любого $t > 0$ для всех, кроме не более чем счетного числа точек $x \in \mathbb{R}$ существует единственное $y(t,x)$ такое, что

$$\min_{y\in\mathbb{R}}\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + h(y)\} = tL\left(\frac{x-y(t,x)}{t}\right) + h(y(t,x)).$$

2) Отображение $y(t,x)$ неубывающее по x.
3) Для любого $t > 0$ функция $u(t,x)$, определенная формулой (4.26), представима в виде

$$u(t,x) = G\left(\frac{x-y(t,x)}{t}\right) \tag{4.27}$$

для п.в. $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство. 1. Заметим, что $L(q) = \max\limits_{p \in \mathbb{R}}\{pq - F(p)\} = p^*q - F(p^*)$, причем $F'(p^*) = q$, а значит, $p^* = G(q)$, откуда $L(q) = qG(q) - F(G(q))$. Значит, $L \in C^2$ как композиция гладких функций, $L'(q) = G(q) + qG'(q) - F'(G(q))G'(q) = G(q)$, $L''(q) = G'(q) > 0$ в силу равномерной выпуклости F. Отсюда и из условия $F(0) = 0$ следует, что $L \geq 0$ и строго выпукла.
2. Пусть $t > 0$, $x_1 < x_2$ – фиксированы. Существует $y_1 \in \mathbb{R}$ такое, что

$$\min_{y \in \mathbb{R}}\{tL\left(\frac{x_1 - y}{t}\right) + h(y)\} = tL\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) + h(y_1). \tag{4.28}$$

Покажем, что

$$tL\left(\frac{x_2 - y_1}{t}\right) + h(y_1) < tL\left(\frac{x_2 - y}{t}\right) + h(y),\ \ y < y_1. \tag{4.29}$$

Положим

$$\tau = \frac{y_1 - y}{x_2 - x_1 + y_1 - y} \in (0, 1).$$

Тогда $x_2 - y_1 = \tau(x_1 - y_1) + (1 - \tau)(x_2 - y)$, $x_1 - y = (1 - \tau)(x_1 - y_1) + \tau(x_2 - y)$. Так как $L'' > 0$, то

$$L\left(\frac{x_2 - y_1}{t}\right) < \tau L\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) + (1 - \tau)L\left(\frac{x_2 - y}{t}\right)$$

и

$$L\left(\frac{x_1 - y}{t}\right) < (1 - \tau)L\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) + \tau L\left(\frac{x_2 - y}{t}\right).$$

Складывая эти неравенства, получаем

$$L\left(\frac{x_2 - y_1}{t}\right) + L\left(\frac{x_1 - y}{t}\right) < L\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) + L\left(\frac{x_2 - y}{t}\right). \tag{4.30}$$

Кроме того, из (4.28) следует, что

$$tL\left(\frac{x_1 - y_1}{t}\right) + h(y_1) \leq tL\left(\frac{x_1 - y}{t}\right) + h(y). \tag{4.31}$$

Умножая (4.30) и складывая с (4.31), получаем (4.29).
3. Положим $y(t, x) = \operatorname{argmin}\{tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + h(y) \mid y \in \mathbb{R}\}$, если минимум единственен, и наименьшим, если точек минимума несколько. Тогда $y(t, x)$ единственно и неубывающее по x.
4. Согласно шагу 1, $L \in C^2$; функция $w(t, x)$, определенная по формуле Хопфа-Лакса, дифференцируема п.в.; отображение $y(t, x)$ монотонно, а следовательно, дифференцируемо п.в. по x. Таким образом, формула (4.26) имеет вид

$$u(t, x) = \frac{\partial}{\partial x}\left(tL\left(\frac{x - y(t, x)}{t}\right) + h(y(t, x))\right),$$

т.е.

$$u(t,x) = L'\left(\frac{x-y(t,x)}{t}\right)(1 - y_x(t,x)) + \frac{\partial}{\partial x}h(y(t,x)). \tag{4.32}$$

5. Так как функция $tL(\frac{x-y}{t}) + h(y)$ имеет минимум в точке $y = y(t,x)$, то функция $\Phi(z) = tL\left(\frac{x-y(t,z)}{t}\right) + h(y(t,z))$ имеет минимум в точке $z = x$. Отсюда $\Phi'_z(x) = 0$, т.е.

$$-L'\left(\frac{x-y(t,x)}{t}\right)y_x(t,x) + \frac{\partial}{\partial x}h(y(t,x)) = 0.$$

Отсюда и из (4.32) получаем $u(t,x) = L'\left(\frac{x-y(t,x)}{t}\right) = G\left(\frac{x-y(t,x)}{t}\right)$.
Теорема доказана.

Упражнение. С помощью формулы Лакса-Олейник получить решение задачи Римана о распаде разрыва.

Литература.

Л.К.Эванс, „Уравнения с частными производными“, §3.3.2, §3.4.2.